Research article

Available in: http://jips.ippi.ac.ir

Iran. J. Polym. Sci. Technol. (Persian),
Vol. 35, No. 1, 67-80
April-May 2022
ISSN: 1016-3255
Online ISSN: 2008-0883
DOI: 10.22063/JIPST.2022.3130.2142

Development of a New Model Based on Ogden-Roxburgh Model for the Prediction of a Stress Softening Behavior of Carbon Black-Filled Rubber Compounds

Mir Hamid Reza Ghoreishy* and Foroud Abbassi Sourki

Department of Rubber Processing and Engineering, Faculty of Polymer Processing, Iran Polymer and Petrochemical Institute, P.O. Box 14975-112, Tehran, Iran

Received: 23 February 2022, Accepted: 12 June 2022

ABSTRACT

Hypothesis: The aim of this study was to propose a modified model for the prediction of a stress softening behavior (Mullins effect) in carbon black-filled rubber compounds. A new equation was suggested for the calculation of the damage variable in the classical Ogden-Roxburgh model based on a previously developed kinetic equation. The parameters of the new model were assumed dependent on the first principal strain. The developed model was verified by comparison of the model predictions with experimental data.

Methods: Four rubber compounds based on S-SBR and E-SBR reinforced by 40 and 60 phr carbon blacks were prepared and cured into rubber sheets. The rubber test specimens (ASTM D412 C) were cut and subjected to cyclic tensile tests at an extension rate of 500 mm/min. In order to show the stress softening behavior, three cycles were selected in a way that the maximum stretch at each cycle was increased consecutively. The volumetric tests were also carried out to determine the bulk modulus and Poisson's ratio. The finite element models of the mentioned tests were created for Abaqus code. The new model was implemented into Abaqus through a user-defined subroutine developed specifically for this research. An optimization algorithm developed in Isight code was employed to determine the parameters of the model for the prepared compounds.

Findings: Comparing the predicted force versus time and force versus displacement with their corresponding experimentally measured data and goodness of fitting for new model and classical Ogden-Roxburgh model revealed that the developed model has higher capability and accuracy in prediction of the mechanical behavior of the rubber compounds. Comparing the ratio of the computed errors between two models showed that the new model has higher accuracy with an average of 38%. Moreover, it is found that there are good correlations between variation of the model parameters with rubber grades and filler contents.

Keywords:
rubber,
modeling,
stress softening,
Mullins effectt,
finite element method

(*)To whom correspondence should be addressed.
E-mail: M.H.R.Ghoreishy@ippi.ac.ir

Please cite this article using:
Ghoreishy M.H.R. and Abbassi Sourki F., Development of a New Model Based on Ogden-Roxburgh Model for the Prediction of a Stress Softening Behavior of Carbon Black-Filled Rubber Compounds, *Iran. J. Polym. Sci. Technol. (Persian)*, **35**, 67-80, 2022.

مقاله پژوهشی

توسعه مدلی جدید بر پایه مدل Ogden-Roxburgh برای پیش‌بینی رفتار نرم‌شدگی تنش در آمیزه‌های لاستیکی پرشده با دوده

دسترس‌پذیر در نشانی: http://jips.ippi.ac.ir

مجله علوم و تکنولوژی پلیمر،
سال سی‌وپنجم، شماره ۱،
صفحه ۸۰-۶۷، ۱۴۰۱
ISSN: 1016-3255
Online ISSN: 2008-0883
DOI: 10.22063/JIPST.2022.3130.2142

میرحمیدرضا قریشی*، فرود عباسی سورکی

تهران، پژوهشگاه پلیمر و پتروشیمی ایران، پژوهشکده فرایند، گروه لاستیک، صندوق پستی ۱۱۲-۱۴۹۷۵

دریافت: ۱۴۰۰/۱۲/۴، پذیرش: ۱۴۰۱/۳/۲۲

چکیده

فرضیه: هدف از این مطالعه ارائه مدلی اصلاح‌شده برای پیش‌بینی رفتار نرم‌شدگی تنش (اثر Mullins) درآمیزه‌های لاستیکی پرشده با دوده است. معادله جدیدی برای محاسبه متغیر تخریب در مدل نرم‌شدگی Ogden–Roxburgh پیشنهاد و راستی‌آزمایی تجربی شد که بر پایه یک معادله سینتیکی است و پارامترهای آن وابسته به کرنش اصلی اول هستند.

روش‌ها: چهار آمیزه لاستیکی بر پایه کائوچوهای S-SBR و E-SBR که با دو مقدار مختلف دوده (۴۰ و ۶۰ phr) تقویت‌شده بودند، ساخته و به‌شکل ورقه‌های لاستیکی پخت شدند. نمونه‌های دمبلی‌شکل از روی ورقه‌ها تهیه و در سه چرخه آزمون کششی رفت‌وبرگشتی با سرعت ۵۰۰ mm/min قرار گرفتند. مقدار کشیدگی به‌نحوی اعمال شد که در هر چرخه مقدار کرنش نهایی نسبت به چرخه قبل افزایش یافت. همچنین آزمون تراکم‌پذیری به‌منظورتعیین مدول توده لاستیک و نسبت پوآسون روی نمونه‌ها انجام شد. سپس، مدل اجزای محدود دو آزمون یادشده ساخته شد. برای رفتارهای ابرکشسان از مدل Yeoh و نرم‌شدگی تنش از مدل جدید پیشنهادی استفاده شد که به‌صورت زیربرنامه رایانه‌ای به نرم‌افزار Abaqus اضافه‌شده بود. به‌کمک نرم‌افزار Isight یک الگوریتم چرخه‌ای بهینه‌سازی طراحی شد و پارامترهای مدل برای آمیزه‌های نام‌برده به‌دست آمدند.

یافته‌ها: بررسی نمودارهای نیرو برحسب زمان و نیرو برحسب تغییرشکل و نیز مقایسه بین مقدار خطای به‌دست‌آمده در مرحله بهینه‌سازی بین داده‌های تجربی و پیش‌بینی‌شده به‌کمک مدل جدید با مدل کلاسیک Ogden–Roxburgh نشان‌دهنده آن است که مدل پیشنهادی قابلیت بسیار خوب و دقت بیشتری در پیش‌بینی رفتار نرم‌شدگی تنش دارد. با مقایسه نسبت خطاها مشخص شد، مدل جدید از لحاظ کمی به‌طور متوسط ٪۳۸ دقت بیشتری دارد. افزون بر این، ارتباط معنادار خوبی بین مقادیر عددی پارامترهای به‌دست‌آمده با گونه‌های کائوچو و مقادیر پرکننده وجود دارد.

واژه‌های کلیدی

لاستیک،
مدل‌سازی،
نرم‌شدگی تنش،
اثر Mullins،
روش اجزای محدود

*مسئول مکاتبات، پیام‌نگار:
M.H.R.Ghoreishy@ippi.ac.ir

مقدمه

رفتار مکانیکی آمیزه‌های لاستیکی پیچیده و چندگانه است، به‌ویژه آن‌هایی که با پرکننده‌هایی همانند دوده تقویت‌شده باشند. علت و عوامل این ویژگی را نویسندگان پیش‌تر در مقاله دیگری توضیح دادند [۱]. این مواد در شرایط مستقل از زمان (بارگذاری‌های آنی یا بلندمدت) رفتاری غیرخطی همراه با پدیده تراکم‌ناپذیری یا به‌عبارت بهتر تقریباً تراکم‌ناپذیری نشان می‌دهند. وجود این پدیده‌ها موجب می‌شود تا نظریه کشسانی کلاسیک [۲] که در آن از مدول یانگ و نسبت پوآسون برای بیان رابطه تنش با کرنش استفاده می‌شود، به پیش‌بینی‌های نادرست تنش و کرنش منجر شود. از این‌رو، باید از معادلات ابرکشسان استفاده شود که از مباحث مهم و نیز شناخته‌شده بوده و روش‌های محاسباتی آن مشخص و دردسترس است. از سوی دیگر، اتلاف انرژی ذخیره‌شده در این مواد هنگام بارگذاری-باربرداری (loading/unloading) که بیشتر در کاربردهای دینامیکی دیده می‌شود، نیز پدیده مهم دیگری است و در نظرگرفتن آن مستلزم استفاده از معادله‌های گران‌روکشسان غیرخطی است. در کنار اثر زمان (یا بسامد) پدیده سومی که موضوع اصلی این پژوهش را شامل می‌شود، نرم‌شدگی تنش است که اگرچه سازوکار متفاوتی با گران‌روکشسانی دارد، اما نِمود آن در رفتار مکانیکی به‌صورت اتلاف انرژی در بارگذاری‌های شبیه‌ایستاست. این پدیده با نام اثر Mullins خوانده می‌شود که در آن بخشی از اتصال‌های بین زنجیر پلیمر و پرکننده (دوده) و شبکه پرکننده در اثر اعمال تنش شکسته شده و موجب کاهش خواص و در نتیجه کاهش تنش لازم برای رسیدن به کرنش مشخصی می‌شود. مشاهده شده است، پس از چند چرخه بارگذاری اولیه رفتار تنش-کرنش به حالت پایدار می‌رسد. افزون بر این، باید وجود پدیده‌هایی همانند تغییرشکل دائمی، رفتگی (wear)، تخریب و شکست (failure) را نیز در نظر گرفت. به دلایل گفته‌شده، در عمل دستیابی به معادله‌های ریاضی جامعی که بتواند همه این ویژگی‌ها را شامل شود، موضوع چالش‌برانگیز است و مطالعات تجربی و نظری در این حوزه همچنان ادامه دارد.

در این پژوهش، به‌طور ویژه به رفتار نرم‌شدگی تنش در آمیزه‌های لاستیکی پرداخته می‌شود و هدف اصلی بررسی و مدل‌سازی ریاضی پدیده نرم‌شدگی تنش و کاربرد آن در نرم‌افزارهای شبیه‌سازی است. پژوهش حاضر دو نوآوری ویژه در این حوزه دارد. نوآوری اول مدل جدیدی را برای پیش‌بینی این پدیده ارائه می‌دهد و مبتنی بر توسعه کار قبلی نویسندگان این مقاله است که از یک مدل سینتیکی بدین منظور استفاده کرده‌اند [۳]. نوآوری دوم به ارتباط بین پارامترهای مدل یادشده با مقادیر توزیع کرنش در نمونه تحت بار رفت‌وبرگشتی کششی اختصاص دارد که درباره آن‌ها توضیحات جامع و مفصلی ارائه می‌شود. در این مقاله ابتدا پیشینه موضوع به‌طور مختصر ارائه شده و سپس مبانی مدل‌سازی ریاضی بیان‌کننده رفتار مکانیکی آمیزه‌های لاستیکی با در نظرگرفتن رفتار ابرکشسان و نرم‌شدگی تنش بررسی می‌شود. در این بخش مدل جدید پیشنهادشده در این کار همراه با دلایل و محاسبات عددی ارائه می‌شود که تأییدکننده نظریه مدل هستند. در ادامه، ضمن معرفی مواد و نمونه آمیزه‌های ساخته‌شده همراه با آزمون‌های انجام‌شده روی آن‌ها، چگونگی محاسبات اجزای محدود با زیربرنامه اختصاصی لازم برای در نظرگرفتن اثر Mullins با مدل پیشنهادی جدید در نرم‌افزار Abaqus [۴] بررسی شده و پس از آن الگوریتم بهینه‌سازی و محاسبات آن برای تعیین پارامترهای مدل ارائه می‌شود. نکته حائز اهمیت این است که ارائه مدلی جامع بدون در نظرگرفتن اثر گران‌روکشسانی میسر نیست. به‌همین دلیل مدل ارائه‌شده در این کار باید با یک مدل گران‌روکشسان مناسب تلفیق شود تا قابلیت کاربرد برای شبیه‌سازی یک قطعه لاستیکی زیر بار را داشته باشد. نحوه تلفیق و چگونگی این کار در مقاله‌های پیشین نویسندگان آورده شده است که از تکرار آن‌ها در اینجا صرف‌نظر می‌شود [۳،۵،۶].

پیشینه پژوهش

نخستین بار Mullins و همکاران [۷،۸] اثر Mullins را که بر پایه کارهای اولیه Holt [۹] قرار داشت، به‌طور جامع مطالعه کردند. هم‌زمان مطالعات تجربی Payne و همکاران انجام شد [۱۲-۱۰]. نظریه یادشده به رفتار دینامیکی تعمیم داده شد. از آنجا که رفتار مکانیکی لاستیک‌ها با استفاده از تابع چگالی انرژی کرنشی (به‌جای بیان مستقیم تانسور تنش برحسب کرنش) استفاده می‌شود. بنابراین، برای بیان ریاضی این پدیده، معادله تابع چگالی انرژی کرنشی به‌نحوی تغییر می‌یابد که دربرگیرنده افت انرژی باشد (توضیحات بیشتر در بخش مدل‌سازی ریاضی آورده شده است). مدل‌سازی این پدیده باید به‌گونه‌ای باشد که بتوان آن را در شبیه‌سازی عددی و پیش‌بینی توزیع تنش و کرنش به‌کار گرفت. Ogden و Roxburgh [۱۳] مدلی را پیشنهاد دادند که در آن اتلاف انرژی ذخیره‌شده ناشی از نرم‌شدگی تنش و نیز کاهش تنش لازم برای رسیدن به مقدار مشخصی کرنش در چرخه‌های متوالی بارگذاری با معرفی یک پارامتر متغیر تخریب (damage variable) همراه با تابع تخریب (damage function) بیان می‌شود (جزئیات کامل این مدل در بخش مدل‌سازی ریاضی بیان می‌شود). مدل این پژوهشگران بر پایه یک نظریه کشسانی غیرخطی

اصلاح‌شده ارائه‌شده توسط Lazapoulos و Ogden [۱۴] قرار دارد که در آن یک متغیر می‌تواند بین قسمت‌های مختلف محیط گسسته باشد. Dorfmann و Ogden [۱۵] نظریه پیشین را توسعه دادند و متغیر جدیدی را با نام متغیر کرنش باقی‌مانده افزون بر متغیر تخریب تعریف کردند. آن‌ها این نظریه را شبه‌کشسانی نامیدند و نشان دادند، این مدل قابلیت خوبی برای پیش‌بینی رفتار بارگذاری-باربرداری در حالت کششی دارد. Qi و Boyce [۱۶] مدلی را برای پایه نظریه Mullins و Tobin [۸] توسعه دادند که در آن فرض شده بود، لاستیک تقویت‌شده با دوده از دو دامنه نرم و سخت تشکیل شده است. آن‌ها یک متغیر حالت تعریف کردند که در واقع جزء حجمی قسمت سخت بوده و چگالی انرژی کرنشی انرژی فقط در قسمت نرم ذخیره می‌شود. همچنین فرض شد، این متغیر تابعی از بیشینه مقدار کشیدگی زنجیر باشد. در کار پژوهشی دیگری Marckmann و همکاران [۱۷] نظریه تغییر شبکه را برای مطالعه این پدیده مطرح کردند. آن‌ها نظریه خود را بر پایه محاسبات آماری چگالی اتصال‌های عرضی (اتصال‌های شیمیایی و فیزیکی) قرار دادند. مطابق نظریه آن‌ها چگالی در اثر اعمال تنش کششی کاهش می‌یابد، به‌نوعی که این مقدار کاهش را می‌توان به بیشینه مقدار کشیدگی زنجیر (همانند مدل Qi و Boyce [۱۶]) مرتبط کرد. بر این اساس مدل تنش-کرنش هشت‌زنجیر Arruda- Boyce (eight-chain) [۱۸] را اصلاح کردند و برای پیش‌بینی نرم‌شدگی تنش در دو آمیزه لاستیک بر پایه NR و SBR تقویت‌شده با دوده به‌کار گرفتند و مورد راستی‌آزمایی قرار دادند. این پژوهش فقط برای حالت کشش بود. سپس نظریه آن‌ها را Chagnon و همکاران از جمله Marokmann [۱۹] اصلاح کردند تا اثر زنجیرهای آویزان (dangling chains) را نیز دربرگیرد. همچنین، عملکرد مدل با شبیه‌سازی سه‌بعدی به‌کمک نرم‌افزار Abaqus ارزیابی شد. در سال‌های اخیر نیز پژوهش‌هایی در این زمینه انجام شده است. Luo [۲۰] مدلی را بر پایه مدل Ogden–Roxburgh توسعه داده که در آن متغیر تخریب تابع زمان بوده و بدین ترتیب اثر زمان را وارد محاسبات کرده است. عملکرد مدل نیز با شبیه‌سازی یک قطعه صنعتی با نرم‌افزار Abaqus بررسی و راستی‌آزمایی شده است. اخیراً Jackstadt و همکاران [۲۱] مدل Dorfmann و Ogden [۱۵] را در نرم‌افزار Abaqus در یک زیربرنامه (Subroutine) قرار داده و قطعه‌ای را شبیه‌سازی سه‌بعدی کرده و عملکرد آن را با مدل Ogden–Roxburgh مقایسه کردند. در کار دیگری Fazekas و Goda [۲۲] مدل Dorfmann و Ogden [۱۵] را برای شبیه‌سازی رفتار نرم‌شدگی تنش آمیزه لاستیکی EPDM تقویت‌شده با دوده در دماهای مختلف به‌کار گرفتند. نویسندگان این مقاله در کار پژوهشی جدیدی مدل چندجزئی را برای بیان رفتار آمیزه‌های لاستیکی بر پایه کائوچوی S-SBR تقویت‌شده با دوده ارائه دادند [۶]. آن‌ها از مدل کلاسیک Ogden–Roxburgh استفاده کردند. نوآوری کار آن‌ها ارائه پارامتر ویژه‌ای برای درنظرگرفتن رفتار شکست ذرات پرکننده بود. در مجموع بررسی مدل‌های ارائه‌شده برای پیش‌بینی رفتار نرم‌شدگی تنش حاکی از آن است که در این مدل‌ها پارامترهای مدل ثابت بوده و وابستگی آن‌ها به مهم‌ترین عامل مؤثر بر نرم‌شدگی تنش در نظر گرفته نشده که مقدار کرنش اعمال‌شده است. در پژوهش حاضر، این مهم بررسی و نشان داده شده است، در نظرگرفتن وابستگی پارامترها به تاریخچه کرنش اعمالی به بهبود نتایج و کاهش معنی‌دار اختلاف بین داده‌های تجربی و پیش‌بینی‌شده با مدل منجر می‌شود. گفتنی است، کارهای پژوهشی دیگری نیز در این زمینه انجام شده که به‌دلیل طولانی‌شدن بحث در این مقاله بیان نشده است.

مدل‌سازی ریاضی

رفتار ابرکشسان

برای رفتار ابرکشسان که بیان‌کننده ویژگی کشسانی غیرخطی و تراکم‌ناپذیری لاستیک است. از مدل پدیده‌نگر استفاده شده است [۲۳]. اغلب مدل‌های ریاضی که برای بیان رفتار ابرکشسان لاستیک‌ها ارائه شده‌اند، به دو دسته تقسیم می‌شوند شامل مدل‌های پدیده‌نگر که در آن به‌طور مستقیم و بدون واردشدن به ساختار مولکولی ماده رابطه بین چگالی انرژی کرنشی با مقدار تغییرشکل نوشته شده و مدل‌های درون‌نگر (mechanistic) که در آن‌ها ساختار مولکولی پلیمر درنظر گرفته می‌شود. مدل Yeoh بر پایه ارائه یک رابطه ریاضی بین چگالی انرژی کرنشی با ناوردای (invariant) اول تانسور تغییرشکل چپ Cauchy-Green (left Cauchy-Green deformation tensor) قرار داشته و به‌همین دلیل نیز بهترین جواب‌ها را با حداقل تعداد آزمون (دو آزمون کششی تک‌محوری و تغییرات حجمی) می‌دهد [۲۴]. معادله ریاضی این مدل به‌شکل زیر است:

$$U = U_{dev} + U_{vol} \quad (۱)$$

که

$$U_{dev} = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{20}(\bar{I}_1 - 3)^2 + C_{30}(\bar{I}_1 - 3)^3 \quad (۲)$$

$$U_{vol} = \frac{k}{2}(1 - J)^2 \quad (۳)$$

در این معادله‌ها، U_{dev} و U_{vol} به‌ترتیب چگالی انرژی کرنشی انحرافی (deviatoric) و حجمی (volumetric) هستند. C_{10}، C_{20} و C_{30} پارامترهای مدل و k مدول توده هستند. همچنین $\bar{I}_1$ و J به‌ترتیب ناوردای اول بخش انحرافی تانسور تغییرشکل چپ Cauchy-Green ($\bar{B}$) و دترمینان تانسور گرادیان تغییرشکل (F) است که به‌صورت زیر داده شده‌اند:

$$\bar{I}_1 = \text{trace}(\bar{B}) = \text{trace}(J^{-\frac{2}{3}} F.F^T) \quad (۴)$$

$$J = \det(F) \quad (۵)$$

همچنین مدول برشی اولیه و نسبت پوآسون لاستیک با معادله‌های زیر داده شده‌اند:

$$\mu_0 = 2C_{10} \quad (۶)$$

$$\nu = \frac{3\left(\frac{k}{\mu_0}\right) - 2}{6\left(\frac{k}{\mu_0}\right) + 2} \quad (۷)$$

تانسور تنش Cauchy (α) نیز از رابطه چگالی انرژی کرنشی و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma = \frac{2}{J} F \frac{\partial U}{\partial C} F^T \quad (۸)$$

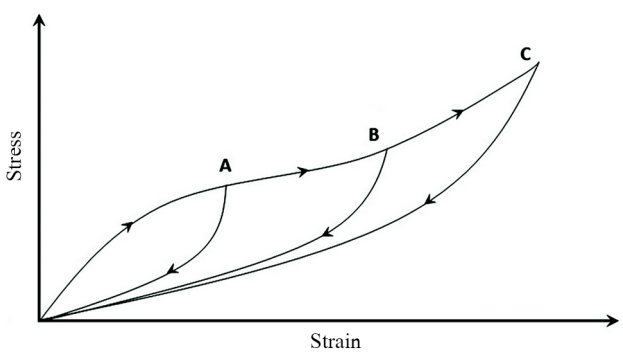
در این معادله (c) تانسور تغییرشکل راست Cauchy-Green ($c = F^T F$) است. بر این اساس و با توجه به معادله‌های (۱) تا (۳) تانسور تنش Cauchy برای مدل Yeoh به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{2}{J}[C_{10} + 2C_{20}(\bar{I}_1 - 3) + 3C_{30}(\bar{I}_1 - 3)^2]\text{dev}[\bar{B}] + k(J-1)I \quad (۹)$$

در این معادله I ماتریس واحد و $\text{dev}[\Lambda] = [\Lambda] - \frac{1}{3}\text{trace}[\Lambda]I$ است.

مدل نرم‌شدگی تنش (اثر Mullins)

همان‌طور که در مقدمه گفته شد، آمیزه‌های لاستیکی پرشده با دوده پدیده نرم‌شدگی تنش نشان می‌دهند که اثر Mullins نامیده می‌شود. در این پدیده بخشی از اتصال‌های بین زنجیر پلیمر و پرکننده (دوده) و شبکه پرکننده در اثر اعمال تنش شکسته شده و باعث کاهش خواص و در نتیجه کاهش تنش لازم برای رسیدن به کرنش مشخصی می‌شود که در نهایت پس از چند چرخه بارگذاری اولیه به حالت پایدار می‌رسد. در واقع، برای رسیدن به مقدار معینی از کرنش، بیشترین مقدار تنش در اولین چرخه بارگذاری وجود دارد که به‌تدریج کاهش می‌یابد و معمولاً پس از ۳ تا ۵ چرخه به مقدار ثابتی می‌رسد. نکته مهمی که باید به آن توجه کرد، اینکه مقدار تخریب (damage) به بیشینه کرنش اعمالی وابسته است و در صورت افزایش کرنش بیشینه مقدار تخریب نیز افزایش می‌یابد و تنش کاهش بیشتری نشان می‌دهد. گفتنی است، منظور از تخریب، شکست اتصال‌های ضعیف پلیمر-پرکننده و پرکننده-پرکننده است و به‌معنی شکست شیمیایی در زنجیر پلیمر و اتصال‌های عرضی نیست. شکل ۱ نمونه‌ای از نمودار کششی رفت‌وبرگشتی برای آمیزه لاستیکی را در سه چرخه بارگذاری نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در اولین چرخه بارگذاری نمونه تا مقدار کرنش مشخص‌شده در نقطه A کشیده شده که در مرحله باربرداری به نقطه اولیه خود برمی‌گردد. در چرخه دوم نمونه دوباره تا نقطه B که کرنش آن بیشتر از نقطه قبلی (یعنی A) است، کشیده و سپس به نقطه ابتدایی برمی‌گردد. در این حالت نمونه کاهش بیشتری را نسبت به حالت قبل نشان می‌دهد. این ویژگی در چرخه سوم نیز دیده می‌شود که نمونه تا نقطه C کشیده و به‌جای اول خود برمی‌گردد. البته همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، آمیزه‌های لاستیکی رفتار گران‌روکشسانی نشان می‌دهند که که پدیده‌ای وابسته به زمان است. در کنار پدیده نرم‌شدگی تنش اثر افزایشی بر اتلاف و کاهش سطح تنش لازم برای رسیدن به مقدار معینی کرنش، دارد. آنچه در این کار مدنظر است، مطالعه اثر Mullins است که در مدل مکانیکی نهایی لاستیک باید در نظر گرفته شود. برای در نظرگرفتن این پدیده از نظریه Ogden-Roxburgh [۱۳] استفاده شده



شکل ۱- منحنی تنش-کرنش آمیزه لاستیکی پرشده تحت چرخه بارگذاری-باربرداری با سه سطح مختلف کرنش (اثر Mullins).

Fig.1. Stress-strain curve for a typical filled rubber compound under cyclic loading/unloading with three different final strains (Mullins effect).

است. مطابق این نظریه، معادله چگالی انرژی کرنشی به‌شکل افزوده (augmented) زیر نوشته می‌شود:

$$U(F,\eta) = \eta U_{dev} + U_{vol} + \phi(\eta) \qquad (۱۰)$$

در این معادله، U_{dev} و U_{vol} به‌ترتیب از معادله‌های (۲) و (۳) (یا سایر معادله‌های مشابه که برای رفتار ابرکشسانی داده شده‌اند) به‌دست می‌آیند. $U(F,\eta)$ تابع چگالی انرژی کرنشی بوده که در حالت کلی تابعی از گرادیان تغییرشکل (F) است. پارامتر η با نام متغیر تخریب خوانده می‌شود و کنترل‌کننده مقدار کاهش تنش ایجادشده در ماده است. مقدار این کمیت در شروع مرحله بارگذاری برابر با ۱ است که در این حالت کاهش تنشی وجود ندارد. در مقابل در مرحله باربرداری این کمیت کاهش می‌یابد و موجب کاهش انرژی ذخیره‌شده در لاستیک می‌شود. به‌عبارت دیگر در این مرحله اتلاف انرژی به‌وجود می‌آید که مقدار آن با عبارت $\phi(\eta)$ داده شده و با نام تابع تخریب (damage function) نامیده می‌شود. همان‌طور که در معادله (۱۰) دیده می‌شود، پدیده کاهش تنش فقط به جزء انحرافی معادله چگالی انرژی کرنشی اعمال شده است و بنابراین جزء حجمی تغییری نمی‌کند. مطابق نظریه Ogden-Roxburgh برای برقراری شرط تعادل فیزیکی که از کمینه‌سازی تابع انرژی به‌دست می‌آید، لازم است تا شرط زیر برقرار باشد (جزئیات بیشتر و نحوه اثبات در مرجع ۱۴ آمده است):

$$\frac{\partial U(F,\eta)}{\partial \eta} = 0 \qquad (۱۱)$$

با اعمال معادله (۱۱) به معادله (۱۰):

$$\phi'(\eta) = -U_{dev} \qquad (۱۲)$$

محدوده تغییرات متغیر تخریب (η) بین ۰ تا ۱ است ($0<\eta\leq 1$). اگر این پارامتر برابر با ۱ باشد، در آن صورت مقدار چگالی انرژی کرنشی ذخیره‌شده انحرافی (U_{dev}) به بیشینه مقدار خود (U_{dev}^{max}) می‌رسد که مرتبط با مرحله بارگذاری لاستیک است. به‌همین ترتیب اگر (U_{dev}) به مقدار کمینه خود برسد (انتهای مرحله باربرداری)، در این حالت متغیر تخریب نیز به مقدار کمینه خود می‌رسد (η_m). در حالتی که ۱= η باشد، در آن صورت معادله (۱۲) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$-\phi'(1) = U_{dev}^{max} \qquad (۱۳)$$

Ogden-Roxburgh [۱۳] معادله زیر را که یک رابطه پدیده‌نگر است، با در نظرگرفتن شرط فوق برای $\phi'(\eta)$ پیشنهاد دادند:

$$\phi'(\eta) = m\,\mathrm{erf}^{-1}[r(1-\eta)] - U_{dev}^{max} \qquad (۱۴)$$

در این معادله، r و m پارامترهای ماده هستند. نرم‌افزار Abaqus [۴] شکل بهبودیافته معادله (۱۴) را پیشنهاد داده است که انطباق بهتری با داده‌های تجربی دارد. شکل این معادله به‌صورت زیر است:

$$\phi'(\eta) = (m + \beta U_{dev}^{max})\,\mathrm{erf}^{-1}[r(1-\eta)] - U_{dev}^{max} \qquad (۱۵)$$

در این معادله m و β دو پارامتر مدل هستند. از معادله (۱۵) و به‌کمک معادله (۱۲) متغیر تخریب (η) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\eta = 1 - \frac{1}{r}\,\mathrm{erf}\left(\frac{U_{dev}^{max} - U_{dev}}{m + \beta U_{dev}^{max}}\right) \qquad (۱۶)$$

تابع تخریب $\phi(\eta)$ را نیز می‌توان به‌طور تحلیلی یا گسسته از معادله‌های (۱۴) یا (۱۵) محاسبه کرد.

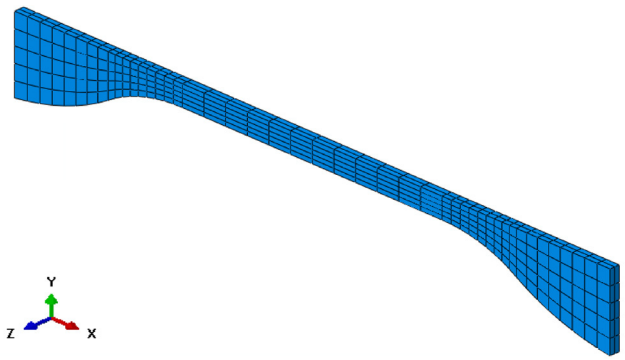
مدل نرم‌شدگی جدید

در کار پژوهشی حاضر مدل جدیدی برای در نظرگرفتن این پدیده معرفی شده است. مدل مزبور رابطه جدیدی را برای $\phi'(\eta)$ و متغیر تخریب η ارائه می‌کند. در معادله (۱۶) برای بیان تغییرات متغیر تخریب از تابع خطا (error function) استفاده شده است تا بتوان تغییرات آن را بین مقادیر ۰ تا ۱ قرار داد. از آنجا که این رابطه فقط یک بیان ریاضی است، به‌عبارت بهتر کاملاً به‌شکل پدیده‌نگری نوشته شده است. بنابراین برای آنکه این رفتار با مدلی که بیشتر با پدیده‌هایی که با ماهیت فیزیکی-مکانیکی که در آمیزه اتفاق می‌افتد، سنخیت داشته باشد، مدل جدیدی ارائه شد. پایه اصلی مدل جدید الهام‌گرفته از مبانی نظریه سینتیکی است که اولین بار قریشی و عباسی [۳] ارائه کردند. در این مدل فرض شده است، پدیده کاهش تنش ناشی از شکست اتصال‌های ضعیف پرکننده-پلیمر و پرکننده-پرکننده را می‌توان با معادله‌ای مشابه سینتیک واکنش‌های شیمیایی بیان کرد. در مدل مزبور تابع $\phi'(\eta)$ و η با روابط زیر داده شده‌اند:

$$\phi'(\eta) = (m + \beta U_{dev}^{max})\left(\frac{1-\eta}{k\eta}\right)^{\frac{1}{n}} - U_{dev}^{m} \qquad (۱۷)$$

$$\eta = \frac{1}{1 + k\left(\frac{U_{dev}^{max} - U_{dev}}{m + \beta U_{dev}^{max}}\right)^{n}} \qquad (۱۸)$$

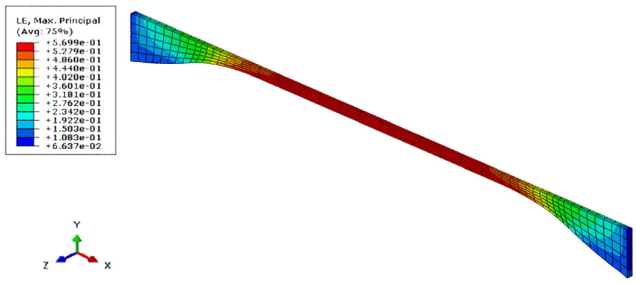
در این معادله‌ها k و n دو پارامتر جدید مدل هستند. نکته مهمی که در اینجا به آن اشاره می‌شود. وابستگی پارامترهای مدل نرم‌شدگی تنش به متغیرهایی همانند کرنش است. نوآوری دوم کار حاضر به همین مطلب برمی‌گردد. در روابطی که تاکنون برای بیان متغیر تخریب ارائه شده است (از جمله معادله‌های (۱۶) و (۱۸)) متغیر مستقل اصلی چگالی انرژی کرنشی (U_{dev}) است و اثر کرنش به‌طور جداگانه در آن‌ها دیده نمی‌شود. نظریه و مدل فکری پژوهش حاضر در این است که با در نظرگرفتن کرنش به‌عنوان متغیر مستقل جدید در کنار چگالی انرژی کرنشی می‌توان به جواب‌های دقیق‌تری رسید. برای بررسی کمی این موضوع، تحلیل اجزای محدود روی نمونه دمبلی‌شکل از یک آمیزه لاستیکی انجام شد که زیر بار چرخه‌ای با سه سطح کرنش افزاینده قرار گرفته بود. شکل ۲ شبکه اجزای محدود نمونه مزبور را نشان می‌دهد که از ۴۶۰ جزء ۲۰-گره‌ای با انتگرال‌گیری کاهش‌یافته تشکیل شده است. برای کاهش حجم مدل اجزای محدود از تقارن موجود در نمونه استفاده شده که مدل فوق در واقع یک‌چهارم نمونه اصلی است. نحوه بارگذاری بدین ترتیب بود که ابتدا نمونه تا ٪۵۰ طول اولیه کشیده شده و سپس به‌حالت اولیه خود برگردانده شد. در مرحله دوم نمونه تا ٪۱۰۰ طول اولیه کشیده شده و پس از برگشت به حالت اولیه، در چرخه سوم دوباره تا ٪۱۵۰ طول اولیه کشیده شد و سرانجام به حالت اولیه خود برگشته است. رفتار مکانیکی آمیزه نیز با مدل ابرکشسان Yeoh همراه با مدل نرم‌شدگی داده‌شده در معادله (۱۶) بیان شد. محاسبات اجزای محدود نیز با نرم‌افزار Abaqus انجام شد. شکل‌های ۳ تا ۵ توزیع کرنش اصلی اول به‌دست‌آمده در نمونه در انتهای بارگذاری سه مرحله یادشده را نشان می‌دهد. به‌همین



شکل ۲- مدل اجزای ۱/۴ محدود نمونه دمبلی‌شکل با در نظر گرفتن تقارن.

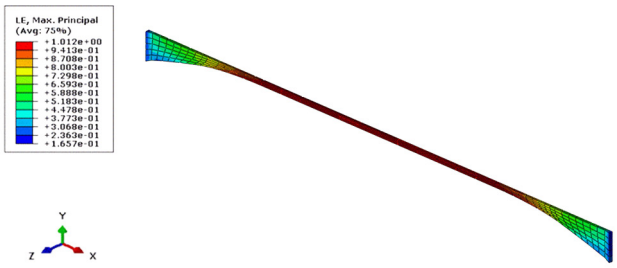
Fig. 2. A 1/4 finite element model of a dumbbell test specimen.

ترتیب شکل‌های ۶ تا ۸ توزیع تابع تخریب، $\phi(\eta)$، را برای نمونه بحث‌شده نشان می‌دهند. با مقایسه بین توزیع کرنش اصلی اول با توزیع تابع تخریب در انتهای هر مرحله مشخص می‌شود، ارتباط مستقیمی بین مقدار کرنش اصلی اول با مقدار تخریب ایجادشده وجود دارد، به‌نحوی که افزایش کرنش اصلی اول متناظر با افزایش تخریب است. افزون بر این، شکل توزیع دو کمیت نیز کاملاً مشابه هم هستند. نتیجه‌ای که از این بررسی گرفته می‌شود، آن است که افزایش کرنش درون نمونه موجب افزایش تخریب می‌شود. این



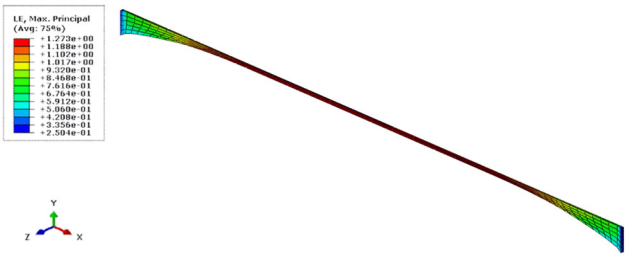
شکل ۳- توزیع کرنش اصلی اول در انتهای مرحله اول بارگذاری.

Fig. 3. Distribution of the first principal strain at the end of first loading step.



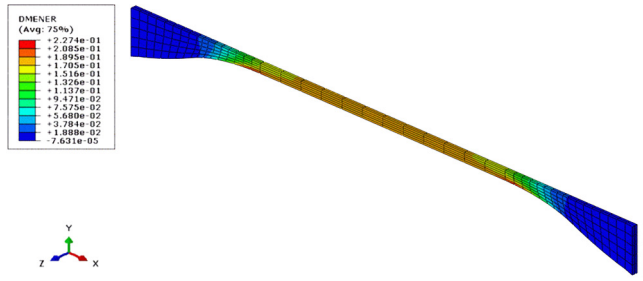
شکل ۴- توزیع کرنش اصلی اول در انتهای مرحله دوم بارگذاری.

Fig. 4. Distribution of the first principal strain at the end of second loading step.



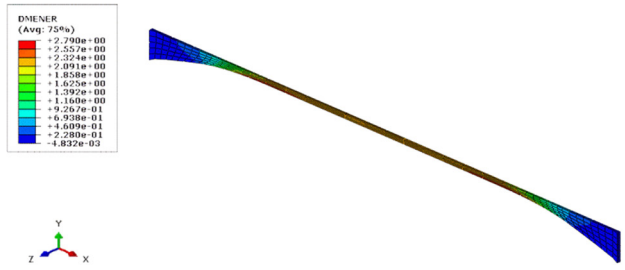
شکل ۵- توزیع کرنش اصلی اول در انتهای مرحله سوم بارگذاری.

Fig. 5. Distributionof the first principal strain at the end of third loading step.



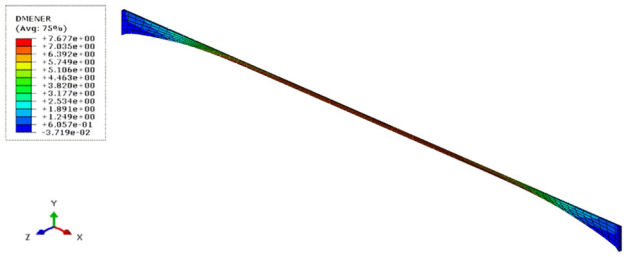
شکل ۶- توزیع تابع تخریب در انتهای مرحله اول بارگذاری.

Fig. 6. Distribution of the damage function at the end of first loading step.



شکل ۷- توزیع تابع تخریب در انتهای مرحله دوم بارگذاری.

Fig. 7. Distribution of the damage function at the end of second loading step.



شکل ۸- توزیع تابع تخریب در انتهای مرحله سوم بارگذاری.

Fig. 8. Distribution of the damage function at the end of third loading step.

نتیجه‌گیری کاملاً درست است، زیرا افزایش کرنش موجب اعمال تنش بین اجزای آمیزه شده و در نتیجه موجب می‌شود تا پیوندهای ضعیف مانند پرکننده-پلیمر شکسته شوند. از آنجا که کرنش کمیتی تانسوری است، بنابراین از کرنش اصلی اول که مستقل از دستگاه مختصات انتخابی بوده استفاده شده است. بر این مبنا در این کار پیشنهاد شد تا پارامترهای مدل تخریب تابعی از مقدار کرنش اصلی اول باشند. بدین ترتیب روابط زیر برای در نظرگرفتن این وابستگی پیشنهاد داده شده‌اند:

$$k = k_0 + k_1 \varepsilon_1^p \qquad (۱۹)$$

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon_1^p \qquad (۲۰)$$

در معادله بالا ε_1^p کرنش اصلی اول و پارامترهای β_1، β_0، k_1 و k_0 جزو ثابت‌های ماده هستند که باید تعیین شوند.

تجربی

مواد

چهار آمیزه لاستیکی بر پایه کائوچوهای SBR محلولی SOL 6450SL و SBR امولسیونی ۱۷۱۲ طراحی شد. وزن مولکولی عددی و وزنی این کائوچوها به‌ترتیب ۳۱۹۰۰۰ و ۸۰۷۰۰۰ برای نوع محلولی و ۱۵۶۰۰۰ و ۴۶۵۰۰۰ برای نوع امولسیونی هستند [۲۵]. برای تقویت آمیزه‌های ساخته‌شده از دوده N330 در مقادیر ۴۰ و ۶۰ جزء به‌ازای صد قسمت کائوچو (phr) استفاده شد. جزئیات فرمول‌بندی آمیزه‌ها همراه با کدهای انتخابی در جدول ۱ آمده است.

دستگاه‌ها و روش‌ها

اختلاط آمیزه‌ها با مخلوط‌کن دوغلتکی مدل Schwabenthan 200 L انجام شد. برای تعیین زمان پخت بهینه نمونه‌ها از رئومتر نوسانی دیسکی (ODR) استفاده شد. پخت آمیزه‌ها با دستگاه پرس ۱۰۰ تن مدل Bucher ساخت سوئیس انجام شد که به‌صورت ورقه‌هایی با ضخامت ۲ mm شکل داده شدند. از روی ورقه‌های ساخته‌شده، نمونه‌های دمبلی طبق استاندارد ASTM D-412 C تهیه شدند و در آزمون کششی چرخه‌ای با سرعت کشش ۵۰۰ mm/min قرار گرفتند. هر نمونه در سه‌چرخه رفت‌وبرگشتی با دستگاه کشش عمومی ساخت شرکت Hiva قرار گرفت، به‌نحوی‌که در هر چرخه مقدار کشیدگی نهایی به‌مقدار متوسط ۵۰٪ تا ۱۰۰٪ نسبت به چرخه قبل افزایش یافت. برای اندازه‌گیری مقدار تراکم‌پذیری آمیزه‌های ساخته‌شده از آزمون تراکم حجمی استفاده شد. در این آزمون یک نمونه استوانه‌ای درون فضای استوانه‌ای توخالی قرار داده شد که از سه جهت محصور بود و با میله فولادی فشرده شده بود و تغییرات نیرو برحسب فشردگی ثبت شد [۲۴]. داده‌های این آزمون در مرحله تعیین پارامترها به پارامتر مقدار تراکم‌پذیری (یا نسبت پوآسون) تبدیل می‌شود.

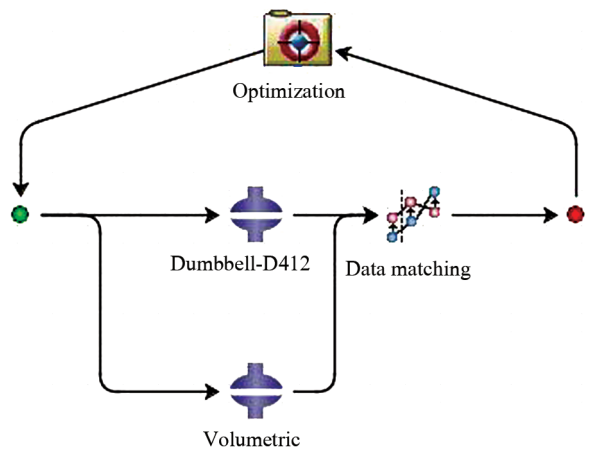
جدول ۱- فرمول‌بندی آمیزه‌ها.

Table 1. Compounds formulations.

Ingredient	Compound code (phr)				Chemical/Trade name	Supplier
	SS40	SS60	SE40	SE60		
S-SBR	137.5	137.5	-	-	Solution polymerized SBR (SOL 6450SL, Oil extended	Kumho, S. Korea
	-	-	-	-	with 37.5 phr aromatic oil)	
E-SBR	-	-	137.5	137.5	Emulsion SBR 1712 (Oil extended	Bandar Imam, Iran
	-	-	-	-	with 37.5 phr aromatic oil)	
ZnO	5	5	5	5	Zinc oxide (ZnO)	Pars Oxide, Iran
St. Acid	2	2	2	2	Stearic acid (St. Acid)	Rhein Chemie
6PPD	2	2	2	2	N-(1,3-dimthylbutyl)-Ń-phenylenediamine (Dusantox)	Duslo, Slovakia
TMQ	1	1	1	1	Poly(1,2-dihydro-2,2,4-trimethyl-quinoline)	Duslo, Slovakia
TBBS	1.5	1.5	1.5	1.5	N-tert.-butyl-2-benzothiazyl sulphenamide	Henan Kailun
TMTD	0.5	0.5	0.5	0.5	Tetramethylthiuram disulfide	Henan Kailun
Sulfur	2	2	2	2	Sulfur	Tesdak, Iran
Black filler	40	60	40	60	Carbon black (N-330)	Iran Carbon Co.

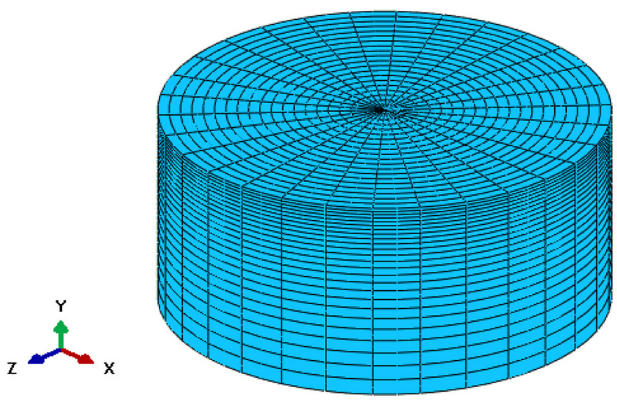
تعیین پارامترهای مدل

بر اساس مطالب گفته‌شده در قسمت‌های قبل پارامترهای مدل ابرکشسان که به آن مدل نرم‌شدگی تنش جدید افزوده شده است، برای چهار آمیزه لاستیکی مطالعه‌شده در این پژوهش با استفاده روش بهینه‌سازی تعیین شدند. برای انجام این کار از چرخه بهینه‌سازی در نرم‌افزار Isight [۲۶] استفاده شد. شکل ۹ نمودار جریان را برای محاسبه مورد نیاز نشان می‌دهد. روش کار بدین ترتیب است که ابتدا مدل اجزای محدود متناظر با هر آزمون شامل نمونه دمبلی (برای آزمون کشش) و استوانه‌ای (برای آزمون تراکم حجمی) ساخته‌شده و با نرم‌افزار Abaqus شبیه‌سازی می‌شوند. شبکه اجزای محدود این مدل‌ها به‌ترتیب در شکل‌های ۲ و ۱۰ نشان داده شده‌اند. از آنجا که نرم‌افزار Abaqus تنها از مدل نرم‌شدگی تنش Ogden-Roxburgh پشتیبانی می‌کند، بنابراین زیربرنامه اختصاصی (user subroutine) به زبان Fortran بر مبنای معادله‌های (۱۷) تا (۲۰) نوشته و به برنامه اصلی اتصال داده شد. این زیربرنامه با نام UMULLINS تهیه شد. برای پارامترهای مواد شامل ثوابت مدل Yeoh و مدل نرم‌شدگی



شکل ۹- نمودار جریان چرخه بهینه‌سازی برای محاسبه پارامترهای مدل.

Fig. 9. Work flow diagram designed of the optimization cycle for the determination of the model parameters.



شکل ۱۰- مدل اجزای محدود آزمون تراکم‌پذیری.

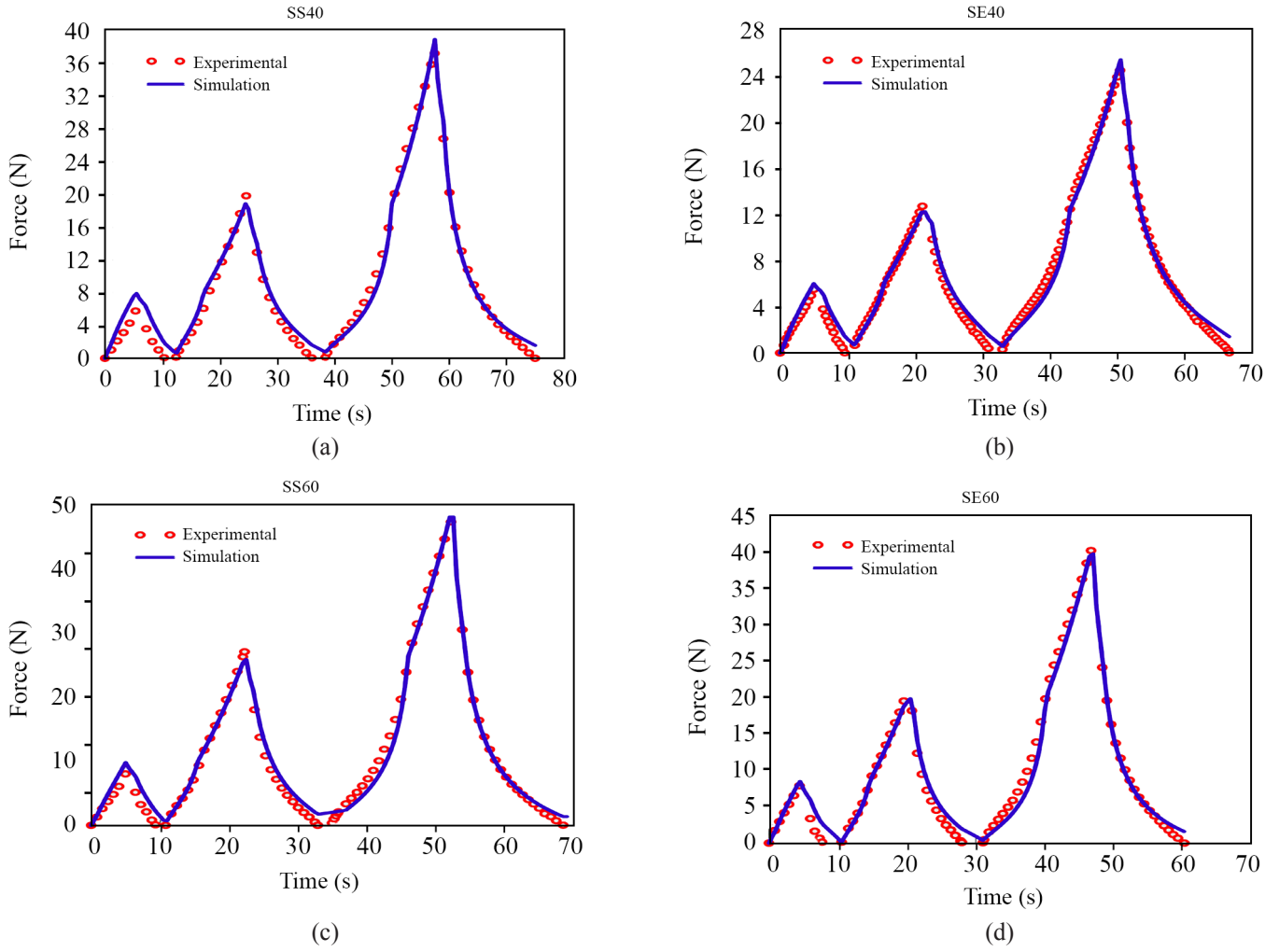
Fig. 10. Finite element model of volumetric test.

تنش جدید مجموعه‌ای از مقادیر اولیه حدس زده شدند. به دنبال آن داده‌های آزمون کشش شامل زمان آزمون، افزایش طول یا جابه‌جایی و نیرو و نیز داده‌های آزمون تراکم حجمی شامل زمان، نیرو و جابه‌جایی عمودی به نرم‌افزار داده می‌شوند. در گام بعد به‌منظور بهبود حدس‌های اولیه و محاسبه دقیق پارامترهای مواد، اختلاف بین نمودار تغییرات نیرو برحسب زمان در دو حالت تجربی و پیش‌بینی‌شده با مدل تعیین می‌شود. سپس، به‌کمک الگوریتم بهینه‌سازی Nelder-Mead پارامترهای جدید تعیین‌شده و این چرخه بهینه‌سازی به‌طور پیوسته تکرار می‌شود تا جایی که مقدار خطا به حداقل برسد که مجموع مربعات اختلاف بین داده‌های تجربی و مدل است (مطابق معادله (۲۱)):

$$\text{error} = \sum_{i=1}^{N} (F_{exp}^{i} - F_{fem}^{i})^2 \qquad (۲۱)$$

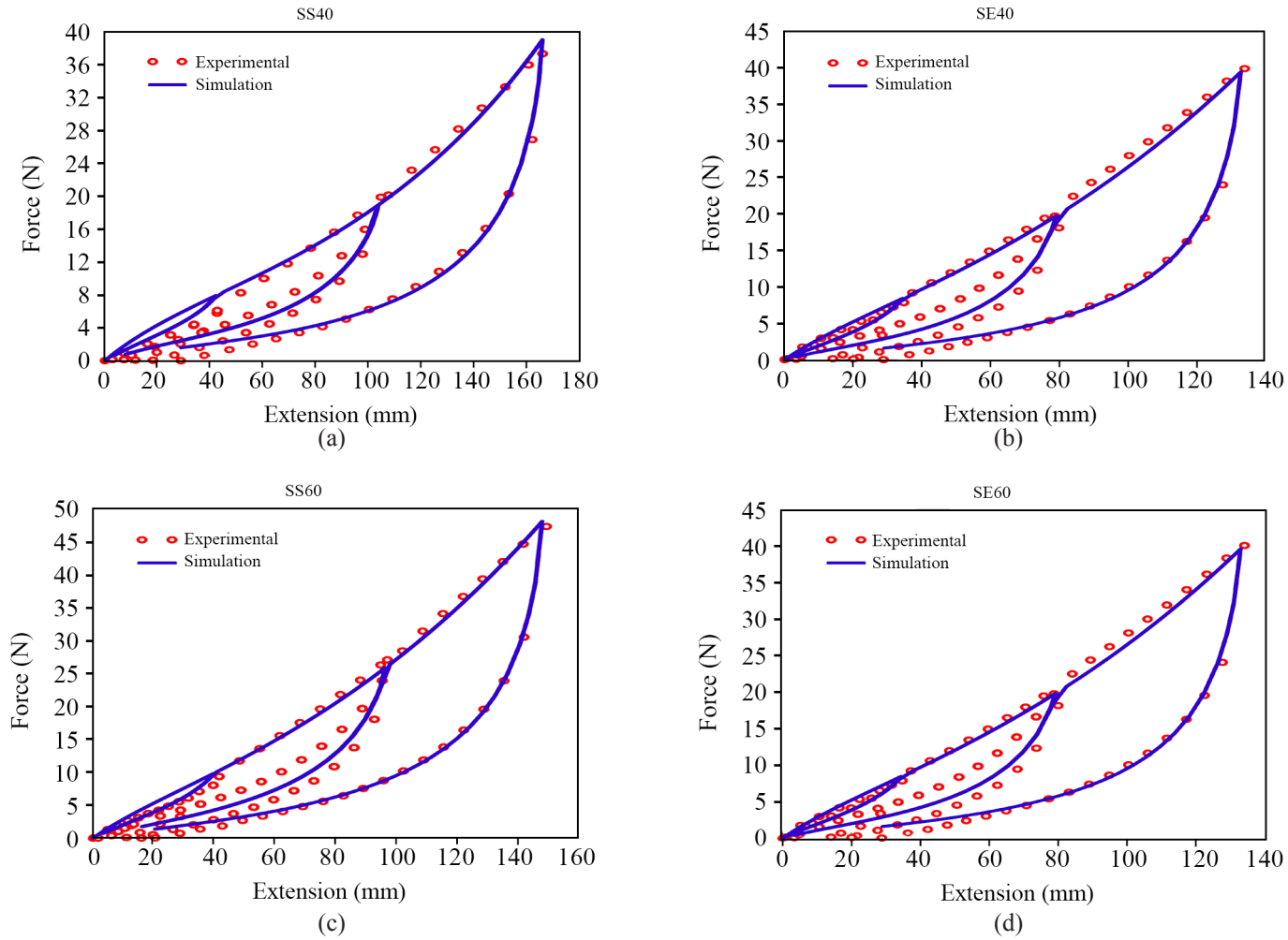
نتایج و بحث

بر اساس الگوریتم گفته‌شده محاسبات لازم روی داده‌های تجربی حاصل از آزمون‌ها روی نمونه‌های لاستیکی مطالعه‌شده انجام شد. پیش از بررسی مقادیر عددی پارامترها و اعتبارسنجی آن‌ها ضروری است تا به دو نکته اشاره شود. اول اینکه در فرایند بهینه‌سازی، همه پارامترها هم‌زمان در هر چرخه محاسباتی به‌روزرسانی می‌شوند. بنابراین با وجود آنکه ممکن است، پارامترهای بهتری برای مدل ابرکشسان وجود داشته باشد. اما دقت نهایی فدای این موضوع نشده است و به حداقل‌رساندن خطا با در نظرگرفتن هر دو ویژگی ابرکشسانی و نرم‌شدگی تنش هدف اصلی بهینه‌سازی را تشکیل می‌دهد. به‌عبارت دیگر پارامترهای مدل ابرکشسان Yeoh و مدل



شکل ۱۱- تغییرات نیرو برحسب زمان (پیش‌بینی‌شده با مدل جدید و داده‌های تجربی) برای آمیزه‌های مختلف: (a) SS40، (b) SE40، (c) SS60 و (d) SE60.

Fig.11. Predicted force vs. time (predicted and experimental data) for different compounds: (a) SS40, (b) SE40, (c) SS60, and (d) SE60.



شکل ۱۲- تغییرات نیرو برحسب جابه‌جایی (پیش‌بینی‌شده با مدل جدید و داده‌های تجربی) برای آمیزه‌های مختلف: (a) SS40، (b) SE40، (c) SS60 و (d) SE60.

Fig. 12. Predicted force vs. displacement (predicted and experimental data) for different compounds: (a) SS40, (b) SE40, (c) SS60, and (d) SE60.

نرم‌شدگی تنش هر دو با هم تغییر می‌کنند و این‌گونه نیست که ابتدا پارامترهای ابرکشسان محاسبه شود و سپس پارامترهای مدل نرم‌شدگی تنش به‌دست آیند. نکته دوم به رفتار گران‌روکشسانی آمیزه برمی‌گردد. در اینجا فقط هدف سنجش رفتار نرم‌شدگی مدل جدید و مقایسه آن با مدل کلاسیک Ogden-Roxburgh است و بنابراین از سنجش مدل در سرعت‌های مختلف تغییرشکل اجتناب شد. بدیهی است، اگر هدف ارائه مدلی جامع باشد، در آن صورت ضروری است تا یک مدل مناسب گران‌روکشسان نیز به آن افزوده شود [۱،۳،۵]

شکل‌های ۱۱(a) تا ۱۱(d) نمودار تغییرات نیروی کششی پیش‌بینی‌شده از روی مدل دمبل لاستیکی برحسب زمان را نشان می‌دهد. همچنین به‌طور مشابه نمودار تغییرات نیرو برحسب جابه‌جایی نیز برای چهار نمونه یادشده در شکل‌های ۱۲(a) تا ۱۲(d) نشان داده شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، انطباق بسیار خوبی بین نتایج مدل با داده‌های تجربی برای هر چهار آمیزه وجود دارد. به‌منظور مقایسه و نشان‌دادن قابلیت بیشتر مدل پیشنهادی، محاسبات فوق با همان مدل ابرکشسان Yeoh اما با مدل نرم‌شدگی تنش Ogden-Roxburgh (معادله (۱۶)) تکرار شدند. برای سنجش نسبی دو مدل، نسبت خطا به‌صورت نسبت خطای به‌دست‌آمده از مدل جدید به خطای محاسبه‌شده با مدل Ogden-Roxburgh تعریف شد. این خطاها با استفاده از معادله (۲۱) تعیین شدند که در واقع نسبت خطاهای محاسبه‌شده از مجموع مربعات خطا در مدل جدید به مقدار مشابه آن در مدل اولیه هستند. جدول ۲ مقادیر به‌دست‌آمده نسبت

جدول ۲- مقدار کاهش نسبت خطاها در پارامترهای پیش‌بینی‌شده رفتار نرم‌شدگی تنش به‌کمک مدل جدید نسبت به مدل اولیه Ogden-Roxburgh (معادله (۱۶)).

Table 2. Reduction of error ratios of predicted parameters of the stress softening behavior by new model to Ogden-Roxburgh model (Eq. 16).

Compound code	Relative error (%)
SS40	57
SE40	61
SS60	64
SE60	67

خطاها را نشان می‌دهد.

گفتنی است، مقدار نسبت خطای ۱۰۰٪ به‌معنی یکسان‌بودن عملکرد دو مدل است. اما همان‌طور که در جدول ۲ نشان داده شده، نسبت خطا در همه موارد کمتر از ۱۰۰٪ بوده که به‌معنی عملکرد بهتر مدل جدید نسبت به مدل کلاسیک Ogden-Roxburgh است. دو علت اصلی برای این موضوع وجود دارد. اول اینکه مدل جدید چون بر مبنای مدلی توسعه‌یافته بوده که پیش‌تر برای توصیف سینتیک یک پدیده شیمیایی و فیزیکی به‌کار گرفته شده است، بنابراین قابلیت بهتری برای بیان رفتار نرم‌شدگی تنش نشان می‌دهد. نکته دوم در نظرگرفتن وابستگی پارامترهای اصلی مدل نرم‌شدگی تنش به مقدار کرنش اعمالی است که موجب شده است تا پارامترهای مدل فقط پارامتر برازش‌کننده نباشند و به پارامتری تغییر یابند که بیانگر فیزیک مسئله است. به‌همین دلیل مدل جدید قابلیت بیشتری در انطباق با داده‌های تجربی نشان می‌دهد که در ادامه بدان بحث می‌شود. همچنین شایان ذکر است، چون در مدل جدید از ۶ پارامتر برای بیان متغیر تخریب (η) استفاده شده است، بنابراین مدل یادشده نسبت به مدل قبلی (معادله (۱۶)) که فقط سه پارامتر دارد، از دقت بیشتری

جدول ۳- پارامترهای پیش‌بینی‌شده مدل Yeoh (معادله‌های (۲) و (۷)).

Table 3. Predicted parameters of the Yeoh model (Eqs. 2 and 7).

Compound code	Parameter			
	C_{10} (MPa)	C_{20} (MPa)	C_{30} (MPa)	n
SS40	0.635	8.10×10^{-03}	1.43×10^{-03}	0.485
SE40	0.504	7.01×10^{-03}	1.02×10^{-03}	0.490
SS60	0.755	5.42×10^{-02}	9.03×10^{-06}	0.474
SE60	0.742	5.10×10^{-02}	7.58×10^{-05}	0.477

برخوردار است. جدول ۳ پارامترهای پیش‌بینی‌شده مدل Yeoh همراه با مقادیر نسبت پوآسون آمیزه‌ها را نشان می‌دهد که از معادله (۷) به‌دست آمده‌اند.

همان‌طور که دیده شد و نیز انتظار می‌رود، با افزایش مقدار پرکننده، ضریب C_{10} که بیانگر مدول برشی اولیه لاستیک است (معادله ۶)، نیز افزایش می‌یابد که به‌معنی افزایش سفتی لاستیک است. دو پارامتر دیگر (C_{20} و C_{30}) پارامترهای برازش بوده که از لحاظ فیزیکی وابستگی مدول برشی لاستیک به کرنش یا رفتار غیرخطی را بیان می‌کنند. همچنین مشاهده می‌شود، آمیزه‌های ساخته‌شده بر پایه نوع محلولی کائوچوی SBR مدول بیشتری را نسبت به آمیزه‌های بر پایه کائوچوی SBR امولسیونی (SS60 و SS40 نسبت به SE60 و SE40) نشان می‌دهند که این نیز به‌دلیل بیشتربودن جرم مولکولی و ساختار خطی نوع محلولی نسبت به امولسیونی است. ستون آخر جدول ۳ نشان می‌دهد، با افزایش مقدار پرکننده، مقادیر نسبت‌های پوآسون کاهش می‌یابند. این بدان علت است که با افزایش پرکننده از مقدار تراکم‌ناپذیری لاستیک به‌دلیل کم‌بودن نسبت پوآسون دوده و قابلیت متراکم‌شدن آن (به‌دلیل ساختار خوشه‌ای-شبکه‌ای) کاسته می‌شود. پارامترهای محاسبه‌شده برای مدل نرم‌شدگی تنش جدید در جدول ۴ نشان داده شده‌اند.

همان‌طور که در معادله (۱۸) مشاهده می‌شود، افزایش k موجب

جدول ۴- پارامترهای پیش‌بینی‌شده مدل جدید برای نرم‌شدگی تنش (معادله (۱۸)).

Table. Predicted parameters of the new model for stress softening phenomenon (Eq. 18).

Compound code	Parameter					
	k_0	k_1	n	m (mJ)	b_0	b_1
SS40	1.144	0.072	0.733	2.109	0.074	-0.047
SE40	1.346	0.253	0.658	2.726	0.297	-0.073
SS60	0.943	0.071	0.731	1.941	0.013	-0.014
SE60	1.022	0.049	0.792	1.194	0.043	-0.017

کاهش η و در نتیجه افزایش تخریب می‌شود. پس می‌توان نتیجه گرفت، این پارامتر به نوعی سینتیک تخریب را بیان می‌کند. از داده‌های جدول ۳ (k_0 و k_1) چنین برمی‌آید که آمیزه‌های بر پایه S-SBR نه‌تنها نسبت به آمیزه‌های مشابه خود که در آن از E-SBR استفاده‌شده دچار تخریب کمتری می‌شوند، بلکه وابستگی کمتری به مقدار کرنش ایجادشده در داخل نمونه دارند. دلیل این موضوع نیز جرم مولکولی بیشتر و ساختار خطی‌تر این نوع کائوچو است که استحکام و سفتی آن وابستگی کمتری به پرکننده در مقایسه با نوع امولسیونی دارد. البته گفتنی است، این نتیجه‌گیری برای نمونه‌های با ۴۰ قسمت وزنی دوده و در محدوده کرنش اصلی اول ایجادشده در نمونه‌هاست که در شکل‌های ۳ تا ۵ نشان داده شده‌اند. با افزایش مقدار پرکننده به ۶۰ قسمت وزنی، اختلاف بین این دو کائوچو از لحاظ تخریب کمتر می‌شود که نشان‌دهنده آن است که اثر پرکننده و شکست ساختار شبکه‌ای آن نسبت به شکست پلیمر–پرکننده بیشتر شده است. اما نکته شایان توجه آن است که با افزایش مقدار پرکننده از ۴۰ به ۶۰ قسمت وزنی، مقدار k نیز کاهش می‌یابد که در ظاهر به‌معنی کاهش تخریب یا اثر Mullins است. بنابراین ممکن است، این سؤال مطرح شود که چرا با افزایش پرکننده تخریب کاهش یافته است، در حالی‌که انتظار می‌رود، تا اثر Mullins روند افزایشی را تجربه کند. برای پاسخ به این سؤال باید هم‌زمان به تغییرات m نیز توجه داشت. از روی داده‌های جدول مشخص است، با افزایش مقدار پرکننده، پارامتر m کاهش‌یافته که از روی معادله (۱۶) مشخص است که افزایش تخریب (کاهش η) را به دنبال دارد. بنابراین کاهش توأم k و m و با توجه به تغییرات n درمجموع موجب می‌شود تا با افزایش پرکننده، مقدار η کاهش و در نتیجه تخریب افزایش داشته باشد. برای همه این‌ها باید تغییرات β و پارامترهای β_1 و β_0 را نیز در نظر گرفت که این مدل در مجموع کاهش متغیر تخریب و در نتیجه افزایش تخریب را با افزایش پرکننده پیش‌بینی می‌کند.

نتیجه‌گیری

در این پژوهش معادله جدیدی برای محاسبه متغیر تخریب در مدل نرم‌شدگی تنش (اثر Mullins) Ogden-Roxburgh پیشنهاد شد که بر پایه سینتیک واکنش شیمیایی قرار دارد. همچنین برای اولین بار شبیه‌سازی عددی و با مقایسه توزیع تابع تخریب با کرنش اصلی اول نشان داده شد که پارامترهای مدل نرم‌شدگی تنش را می‌توان تابعی از کرنش اصلی اول در نظر گرفت. با مقایسه بین مقادیر محاسبه‌شده نیرو برحسب زمان و نیرو برحسب تغییرشکل با داده‌های تجربی مشخص شد، مدل جدید به‌طور متوسط ٪۳۸ از دقت و صحت بیشتری در پیش‌بینی رفتار مکانیکی آمیزه‌های لاستیکی نسبت به مدل اولیه Ogden-Roxburgh برخوردار است.

مراجع

1. Ghoreishy M.H.R. and Abbassi-Sourki F., Study the Hyper-Viscoelastic and Stress Softening Behaviors of Various SBR/CB Filled Compounds Using a Triple Model, *Iran. J. Polym. Sci. Technol. (Persian)*, **33**, 339-350, 2020.
2. Bergström J., *Continuum Mechanics Foundations, Mechanics of Solid Polymers: Theory and Computational Modeling*, Elsevier, San Diego, CA, USA, 131-207, 2015.
3. Ghoreishy M.H.R. and Abbassi-Sourki F., Development of a New Combined Numerical/Experimental Approach for the Modeling of the Nonlinear Hyper-viscoelastic Behavior of Highly Carbon Black Filled Rubber Compound, *Polym. Test.*,**70**, 135-143, 2018
4. Abaqus, Simulia , Dassault Systemes, 2020.
5. Samaei S., Ghoreishy M.H.R., and Naderi G., Effects of SBR Molecular Structure and Filler Type on the Hyper-Viscoelastic Behavior of SBR/BR Radial Tyre Tread Compounds Using a Combined Numerical/Experimental Approach, *Iran. J. Polym. Sci. Technol. (Persian)*, **32**, 65-78, 2019.
6. Ghoreishy M.H.R., and Abbassi Sourki F., Modeling the Hyperviscoelasticand Stress-Softening Behaviors of S-SBR/CB-Filled Rubber Compound Using a Multicomponent Model, *Mech. Time-Depend. Mater*. (in Press), 2022. DOI. org/10.1007/s11043-022-09550-3
7. Mullins L., Softening of Rubber by Deformation, *Rubber Chem. Technol*., **42**, 339-362, 1969.
8. Mullins L. and Tobin N.R., Theoretical Model for the Elastic Behavior of Filler-Reinforced Vulcanized Rubbers, *Rubber Chem. Technol*., **30**, 555-571, 1957.
9. Holt W.L., Behavior of Rubber under Repeated Stresses, *Rubber Chem. Technol*., **5**, 79-89, 1932.

10. Payne A.R. and Whittaker R.E., Reinforcement of Rubber with Carbon Black, *Composites*, **1**, 203-214, 1970.
11. Payne A.R.,The Dynamic Properties of Carbon Black Loaded Natural Rubber Vulcanizates. Part I., *J. Appl. Polym. Sci*., **6**, 57-63, 1962.
12. Payne A.R., The Dynamic Properties of Carbon Black-Loaded Natural Rubber Vulcanizates. Part II., *J. Appl. Polym. Sci*., **6**, 368-372, 1962.
13. Ogden R.W. and Roxburgh D.G., A Pseudo–Elastic Model for the Mullins Effect in Filled Rubber, *Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **455**, 2861-2877, 1999.
14. Lazopoulos K.A. and Ogden R.W., Nonlinear Elasticity Theory with Discontinuous Internal Variables, *Math. Mech. Solids*, **3**, 29-51, 1998.
15. Dorfmann A. and Ogden R.W., A Constitutive Model for the Mullins Effect with Permanent Set in Particle-Reinforced Rubber, *Int. J. Solids Struct*., **41**, 1855-1878, 2004.
16. Qi H.J. and Boyce M.C., Constitutive Model for Stretch-Induced Softening of the Stress-Stretch Behavior of Elastomeric Materials, *J. Mech. Phys. Solids*, **52**, 2187-2205, 2004.
17. Marckmann G., Verron E., Gornet L., Chagnon G., Charrier P., and Fort P., A Theory of Network Alteration for the Mullins Effect, *J. Mech. Phys. Solids*, **50**, 2011-2028, 2002.
18. Arruda E.M. and Boyce M.C., A Three-Dimensional Constitutive Model for the Large Stretch Behavior of Rubber Elastic Materials, *J. Mech. Phys. Solids*, **41**, 389-412, 1993.
19. Chagnon G., Verron E., Marckmann G., and Gornet L., Development of New Constitutive Equations for the Mullins Effect in Rubber Using the Network Alteration Theory, *Int. J. Solids Struct*., **43**, 6817-6831, 2006.
20. Luo R.K., Investigation on the Full Mullins Effect Using Time-Dependent Hyperelastic Model with Energy Dissipation for Rubber Antivibration Applications, *Mech. Time-Depend. Mater*., **25**, 581-600, 2021.
21. Jackstadt A., Frölich F., Weidenmann K., and Kärger L., Modeling the Mullins Effect of Rubbers Used in Constrained-Layer Damping Applications, *Proc. Appl. Math. Mech*., **21**, 1-4, 2021.
22. Fazekas B. and Goda T.J., Constitutive Modelling of Rubbers: Mullins Effect, Residual Strain, Time-Temperature Dependence, *Int. J. Mech. Sci*., **210**, 106735, 2021.
23. Yeoh O.H., Some Forms of the Strain Energy Function for Rubber, *Rubber Chem. Tchnol*., **66**, 754-771, 1993.
24. Ghoreishy M.H.R., Computer Simulation of Passenger Car Radial Tires Using the Finite Element Method, *Computer Simulations: Advances in Research and Applications*, Pfeffer M.D. and Bachmeier E. (Eds.), Nova Science, New York, 1-61, 2018.
25. Ghoreishy M.H.R. and AbbassiSourki F., The Molecular Structure of SBR and Filler Type Effects on Thermal Diffusivity of SBR/BR Compounds used in Tire Tread, *Iran. J. Polym. Sci. Technol. (Persian)*, **30**, 139-149, 2017.
26. Isight, Simulia, Dassault Systemes, 2020.