



An Experimental and Numerical Verification of Different Hyperelastic Material Models for Rubbers under Tension and Compression Loads

M.H.R. Ghoreishy

Iran Polymer and Petrochemical Institute, P.O. Box: 14965-115, Tehran, Iran

Received 1 June 2009, accepted 2 September 2009

ABSTRACT

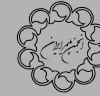
Some numerical and experimental investigations are made on the performance of five different hyperelastic constitutive models (second order polynomial, Yeoh, Arruda-Boyce, Ogden and Marlow) in tension and compression modes. First, the results of the tensile and compression tests on a rubber sample were used to determine the parameters of the models by curve fitting methods. Next, by using an algorithm based on adaptive meshing technique and minimizing the Mises Equivalent Stress, the best finite element mesh of the tensile and compression specimens were obtained. These finite element meshes were then employed for the simulation of the tests, and the predicted force-displacements curves were compared by the experimentally measured data. It is found that the Marlow model gives the best result provided that the stress-strain curve of the simple tension experiment is available.

Key Words:

rubber,
finite element method,
hyperelastic,
Marlow model,
adaptive meshing

(*)To whom correspondence should be addressed.

E-mail: M.H.R.Ghoreishy@ippi.ac.ir



بررسی عددی و تجربی رفتار مدل‌های ابرکشسان آمیزه‌های لاستیکی زیر بارهای کششی و فشاری

میرحمید رضا قریشی

تهران، پژوهشگاه پلیمر و پتروشیمی ایران، صندوق پستی ۱۱۵-۱۴۹۶۵

دریافت: ۸۸۳/۱۱، پذیرش: ۸۸۶/۱۱

چکیده

در این کار پژوهشی، کارایی پنج مدل مکانیکی ابرکشسان شامل مدل‌های چندجمله‌ای مرتبه دوم، یه او (Yeoh)، آردا - بویس (Arruda-Boyce)، اگدن (Ogden) سه جمله‌ای و مارلو (Marlow) بررسی و در پیش بینی رفتار یک آمیزه لاستیکی با فرمول بندی عمومی زیر بارهای کششی و فشاری مورد سنجش عددی قرار گرفته است. بدین منظور، ابتدا آزمون‌های کششی و فشاری تک محوری روی آمیزه لاستیکی مورد نظر انجام و پارامترهای مدل‌های یاد شده به کمک برازش غیرخطی معین شده‌اند. به دنبال آن دو مدل اجزای محدود سه بعدی و دوبعدی متقارن محوری به ترتیب برای شبیه سازی دو آزمون کششی و فشاری ایجاد و همراه با مدل‌های یاد شده تحلیل غیرخطی شده‌اند. در این مرحله، با محاسبه مقدار خطای ناشی از نوع اجزای انتخابی و نحوه شبکه سازی همراه با استفاده از روش انطباقی شبکه اجزای محدود بهینه به دست آمده است. با رسم نمودارهای محاسباتی نیرو بر حسب تغییر مکان و مقایسه آنها با داده‌های تجربی کارایی این مدل‌ها مطالعه شده است. نتایج نشان می‌دهد، اگرچه تمام مدل‌ها در مرحله برازش از خود انطباق خوبی با داده‌های تجربی نشان می‌دهند، ولی در شرایط رفتار کششی و فشاری میزان انطباق متفاوت است. نتیجه گیری نهایی بدین ترتیب حاصل شد که مدل مکانیکی مارلو بهترین جواب را به دست می‌دهد.

واژه‌های کلیدی

لاستیک،
روش اجزای محدود،
ابرکشسان،
مدل مارلو،
شبکه بندی انطباقی

* مسئول مکاتبات، پیام نگار:

مقدمه

تحلیل اجزای محدود قطعات لاستیکی زیر بارهای مکانیکی ایستا و پویا همانند سایر تحلیل‌های مشابه دارای چهار رکن اساسی است. این چهار رکن عبارتند از:

- ۱- ایجاد شبکه اجزای محدود مناسب،
- ۲- انتخاب مدل مواد و تعیین پارامترهای آن،
- ۳- تعیین و اعمال شرایط مرزی و
- ۴- اعمال بار وارد شده.

البته برای تحلیل‌های پیچیده تعیین برخی ورودی‌های خاص همانند منحنی بارگذاری و وابستگی آن به زمان یا پارامترهای کنترلی در نحوه حل معادلات غیرخطی نیز ضروری است. در این میان، انتخاب مدل مواد مناسب و تعیین پارامترهای آن از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، چرا که اثرگذارترین بخش بر میزان دقت و صحت نتایج عددی به دست آمده را تشکیل می‌دهد. از همین روست که تاکنون مدل‌های زیادی برای بیان رفتار مکانیکی لاستیک‌ها ارائه شده که آگاهی از میزان کارایی آنها بسیار حائز اهمیت است. مواد لاستیکی به دلیل ویژگی‌های منحصر به فرد ساختاری خود که در دمای محیط بسیار انعطاف پذیراند و نیز قابلیت تغییر شکل‌های بسیار برگشت پذیر، رفتار مکانیکی خاصی از خود بروز می‌دهند. مهم‌ترین ویژگی آنها تراکم ناپذیری است و از این رو دارای نسبت پواسونی بسیار نزدیک به ۰/۵ هستند. این امر، دشواری‌های محاسباتی خاصی را به ویژه به هنگام استفاده از اجزای سه بعدی به دنبال دارد. مجموعه همه این مسائل موجب شده تا رفتار مکانیکی مستقل از زمان مواد لاستیکی را با مدل‌هایی که اصطلاحاً هایپرلاستیک (hyperelastic) یا ابرکشسان نامیده می‌شوند، مورد مطالعه قرار دهند.

تاکنون، پژوهش‌گران زیادی مسئله استفاده از مدل‌های ابرکشسان در شبیه‌سازی قطعات لاستیکی را بررسی و مطالعه کرده‌اند، به نوعی که چند مقاله مروری در این راستا به چاپ رسیده است. از جمله این کارها می‌توان به مقالات [۱] Pan و Morman، [۲] Nicholson و همکاران [۳] و [۴] Muhr اشاره کرد. بدین ترتیب، آنها کاربرد روش اجزای محدود در شبیه‌سازی قطعات لاستیکی خودرو، در طراحی قطعات لاستیکی و مدل‌سازی رفتار تنش - کرنش در لاستیک‌ها را ارزیابی کردند. هم‌چنین، Beda [۵] ضمن ارائه یک مدل جدید مدل‌های مختلف ابرکشسان را مرور کرد. اما، در حوزه سنجش قابلیت‌ها و نحوه کارایی این مدل‌ها به هنگام استفاده از آنها در نرم‌افزارهایی که بر پایه روش اجزای محدود کار می‌کنند، تاکنون مقالات چندانی به چاپ نرسیده است. از نخستین کارهای انجام شده در این زمینه، می‌توان به کار Kumar و Finney [۶] اشاره کرد که در آن چند روش ساده برای تعیین

پارامترهای معادلات ابرکشسان ارائه و بررسی شده است. اگرچه از آن زمان تاکنون چند مدل جدید ارائه شده است، ولی مطالعه آنها راه‌گشای بسیار خوبی برای فعالیت‌های بعدی بود. Li-Rong و Zhen-Hua [۷] به بررسی کاربرد روش اجزای محدود در تحلیل یک قطعه لاستیکی خودرو پرداخته و در آن انواع مدل‌های ابرکشسانی را مطالعه کردند که تا آن تاریخ در دسترس بود. آنها به کمک این روش سعی کردند تا پارامترهای مواد را به طور دقیق به دست آورده و اثر آن را روی دقت و صحت نتایج بررسی کنند. در کار جدیدی که اخیراً توسط قاسمی و همکاران [۸] به چاپ رسیده است، مدل‌های ابرکشسان متعددی انتخاب و میزان انطباق‌پذیری داده‌های حاصل از آزمون کششی روی یک یا چند آمیزه لاستیکی پر شده با نانورس با نتایج برازش شده سنجش شده‌اند. آنها هم‌چنین سعی کردند تا بین ساختار و شکل‌شناسی آمیزه‌ها و میزان انطباق‌پذیری ارتباط برقرار کنند.

در این کار پژوهشی، کارایی عددی پنج مدل مکانیکی ابرکشسان در پیش‌بینی رفتار مکانیکی یک آمیزه لاستیکی با شبیه‌سازی آزمون‌های تعیین پارامترهای این مدل‌ها به کمک روش اجزای محدود مطالعه شده است. پنج مدل انتخابی عبارتند از: مدل‌های چندجمله‌ای مرتبه دوم، یه او (Yeoh)، آردو - بویس (Arruda-Boyce)، اگدن (Ogden) سه‌جمله‌ای و مارلو (Marlow). نوآوری ویژه این کار را می‌توان در مقایسه بین داده‌های تجربی و مقادیر محاسباتی برای پنج مدل یاد شده به شکل هم‌زمان و نیز بررسی و مقایسه سه جانبه داده‌های تجربی، برازش و شبیه‌سازی با روش اجزای محدود دانست که برای نخستین بار در این مقاله ارائه می‌شود. هم‌چنین، به طور ویژه باید به استفاده از مدل مارلو و سنجش کارایی آن در مقایسه با سایر مدل‌های ابرکشسان اشاره کرد که در این پژوهش به طور اختصاصی بررسی شده است. افزون بر این، نوآوری دیگر این کار استفاده از فن شبکه‌بندی انطباقی (adaptive meshing) و کمینه‌سازی تنش معادل مایسس (mises equivalent stress) بود که بر مبنای آن و از راه مقایسه بین داده‌های تجربی و نتایج شبیه‌سازی و نیز توزیع تنش فون مایسس، شبکه اجزای محدود بهینه به دست آمد.

مبنای سنجش در این کار مقایسه بین داده‌های تجربی حاصل از اندازه‌گیری تجربی و نتایج عددی به دست آمده بود. بر این اساس ابتدا دو آزمون کششی (ASTM D-412) و فشاری (ISO 7743) روی نمونه لاستیکی انجام شد. به دنبال آن با استفاده از داده‌های تجربی حاصل از آزمون کششی پارامترهای مدل‌های مکانیکی انتخابی معین و سپس این پارامترها برای شبیه‌سازی دو آزمون کششی و فشاری یاد شده استفاده شدند. مدل‌ها، با رسم نمودارهای نیرو و برحسب تغییر مکان در دو حالت کششی و فشاری و مقایسه با نتایج تجربی سنجیده شدند. در ادامه این مقاله، نخست مدل‌های ابرکشسان انتخابی و سپس آزمون‌ها و نحوه

در مدل یه او مقدار n برابر ۳ در نظر گرفته شده است.

مدل آرودا - بویسی (Arruda-Boyce)

در این مدل ساختار مولکولی الاستومر به شکل زنجیر با رفتار غیرگوسی در شبکه در نظر گرفته می‌شوند. مدل یاد شده به شکل زیر است [۱۰]:

$$W = \mu \sum_{i=1}^5 \frac{C_i}{\lambda_m^{2i-2}} (I_1^i - 3^i) \quad (3)$$

که

$$C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = \frac{1}{20}, C_3 = \frac{11}{1050},$$

$$C_4 = \frac{19}{7000}, C_5 = \frac{519}{673750}$$

در معادله (۳)، μ مدول برشی اولیه و λ_m ضریب کشیدگی قفل شده (locking stretch) است. به طور تقریبی می‌توان گفت، در این مقدار کشیدگی شیب نمودار تنش - کرنش افزایش قابل ملاحظه‌ای می‌یابد.

مدل اگدن (Ogden)

این مدل [۱۱] به طور مستقیم بر پایه نسبت‌های کشیدگی ارائه شده است که به شکل زیر است:

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{2\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad (4)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که در حالت خاص $\alpha_1 = 2$ ، $\alpha_2 = -2$ و $\alpha_3 = 2$ و $n = 2$ باشد، معادله (۴) به معادله مونی - ریولین تبدیل می‌شود.

مدل مارلو (Marlow)

پیچیدگی معادلات ابرکشسان ارائه شده به ویژه در زمینه تعیین دقیق پارامترهای مدل به نوعی که قادر به پیش‌بینی صحیح در حالت‌های مختلف تغییر شکل باشند، منجر به ارائه مدل جدیدی توسط مارلو در سال ۲۰۰۳ شده است که به نام خود وی خوانده می‌شود [۱۲]. در این روش نیز فرض شده است، چگالی انرژی کرنشی (با فرض تراکم ناپذیری) تنها تابعی از نوردای اول باشد، یعنی:

$$W = W(I_1) \quad (5)$$

با توجه به این که برای مواد تراکم ناپذیر $I_3 = 1$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

انجام آنها معرفی شده است. در بخش نتایج و بحث ابتدا داده‌های حاصل از برآزش ارائه و سپس چگونگی ایجاد و توسعه دو مدل اجزای محدود سه بعدی و دوبعدی متقارن محوری به همراه فن به کار برده شده برای بهینه کردن شبکه اجزای محدود به تفصیل بررسی شده است. در ادامه نتایج محاسبات اجزای محدود ارائه می‌شود.

اساس نظری

مدل‌های ابرکشسان

مدل‌های ابرکشسان برخلاف سایر مدل‌های بیان‌کننده رفتار مواد بر اساس رابطه بین تنش و کرنش نوشته نشده‌اند. بیان ریاضی این مدل‌ها به شکل رابطه بین چگالی انرژی کرنشی و ناورداهای (invariants) تانسور کرنش (I_1, I_2, I_3) یا سه نسبت کشیدگی اصلی $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ بیان می‌شوند. جزئیات بیشتر در باره نحوه فرمول‌بندی و معادلات مربوط در مراجع [۲-۴] آورده شده است و بنابراین در این جا از تکرار آنها صرف نظر می‌شود. همان‌طور که پیشتر اشاره شد، در این پژوهش از پنج مدل ابرکشسان استفاده شد که به ترتیب در ادامه معرفی می‌شوند.

مدل چندجمله‌ای (Polynomial)

مدل چندجمله‌ای در حالت کلی به شکل زیر بیان می‌شود:

$$W = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (1)$$

که در این معادله، W چگالی انرژی کرنشی، C_{ij} پارامترهای معادله و I_1 و I_2 به ترتیب ناورداهای اول و دوم تانسور کرنش هستند. هم‌چنین، در این معادله $C_{00} = 0$ و $I_3 = 0$ فرض شده است که فرض اخیر ناشی از تراکم ناپذیری (ثابت فرض کردن حجم لاستیک) است. در حالت خاص چنانچه $m = n = 1$ و از جمله $C_{11} = 0$ صرف نظر شود، در این حالت معادله معروف مونی - ریولین (Mooney-Rivlin) حاصل می‌شود. در این کار فرض شد که $m = n = 2$ است و بنابراین معادله دارای پنج جمله خواهد بود.

مدل یه او (Yeoh)

این مدل [۹] حالت خاصی از مدل چندجمله‌ای کاهش یافته است. در این دسته مدل‌ها فرض شده که چگالی انرژی کرنشی تنها تابعی از نوردای اول باشد، یعنی:

$$W = \sum_{i=0}^n C_{i0} (I_1 - 3)^i \quad (2)$$

ISO 7743 واقع شدند. هر دو آزمون با دستگاه آزمون مکانیکی هیوا انجام و مقادیر تنش و کرنش اسمی به همراه نیرو و تغییر مکان ثبت شد. تنش و کرنش اسمی به ترتیب از حاصل تقسیم نیرو و افزایش طول اندازه‌گیری شده بر سطح مقطع اولیه و طول اولیه نمونه محاسبه شدند. شکل‌های ۱ و ۲ دو نمونه دمبل و قرص همراه با فک‌های مربوط را نشان می‌دهند.

نتایج و بحث

در این بخش، ابتدا نتایج برازش عددی داده‌ها که برای تعیین پارامترهای مدل‌های مکانیکی ابرکشسان انجام شده‌اند، ارائه و سپس چگونگی توسعه مدل اجزای محدود هر آزمون که به وسیله روش شبکه بندی انطباقی و مقایسه انجام گرفته است به تفصیل مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد و در انتها نیز نتایج حاصل از شبیه‌سازی اجزای محدود و داده‌های تجربی مقایسه می‌شود.

برازش و تعیین پارامترها

داده‌های تنش و کرنش اسمی به دست آمده از آزمون‌ها با فرض یک بعدی بودن تغییر مکان در مدل‌های مکانیکی انتخابی قرار گرفته و پارامترهای هر مدل توسط برازش به دست آمدند (جدول ۱). شکل‌های ۳ و ۴ نمودار تنش - کرنش حاصل از آزمون به همراه نمودارهای برازش شده را نشان می‌دهد. در این مرحله، هر پنج مدل در ناحیه کرنش مثبت



شکل ۱ - نمونه دمبلی شکل در دستگاه کشش.

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \quad (6)$$

از روی معادله (۶) می‌توان نشان داد، مقدار کمینه I_1 برابر ۳ و مقدار بیشینه آن $+\infty$ است. حال اگر I_1 برای حالت کشش تک محوری نوشته شود، یعنی:

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \quad (7)$$

در این حالت به راحتی دیده می‌شود که در این جانیز I_1 بین ۳ تا $+\infty$ تغییر می‌کند. بنابراین، می‌توان نتیجه‌گیری کرد که در حالت داشتن داده‌های مربوط به یک آزمون تک محوری کششی به راحتی می‌توان مقدار چگالی انرژی کرنشی متناظر را به دست آورد. بدین ترتیب که با در دست داشتن I_1 (در حالت سه بعدی) مقدار λ متناظر در حالت یک بعدی آن از روی معادله (۷) به دست می‌آید. حال با در دست داشتن λ مقدار تنش از روی داده‌های تجربی آزمون تک محوری کششی معلوم و سپس مقدار چگالی انرژی کرنش با استفاده از معادله (۸) محاسبه می‌شود:

$$W(I) = \int_0^{\lambda_T(I)-1} \sigma(\epsilon) d\epsilon \quad (8)$$

که در این معادله $\sigma(\epsilon)$ و σ به ترتیب تنش اسمی و کرنش در حالت کششی تک محوری بوده که از روی داده‌های تجربی به طور مستقیم در معادله (۸) جای‌گزین می‌شوند. ملاحظه می‌شود، در مدل مارلو معادله مشخصی برخلاف سایر مدل‌ها وجود ندارد و تنها با یک مشابه‌سازی بین حالت سه بعدی و کشش تک محوری محاسبات انجام می‌شود. از مدل مکانیکی مارلو اخیراً در شبیه‌سازی یک تایر رادیال سیمی استفاده شد که با هدف بررسی اثر قطر رینگ انجام شده بود [۱۳].

تجربی

مواد، دستگاه‌ها و روش‌ها

در این کار از یک آمیزه لاستیکی با فرمول بندی عمومی پر شده با دوده استفاده شد. ابتدا، آمیزه لاستیکی مورد بحث به شکل صفحه لاستیکی با ضخامت کم (حدود ۲ mm) پخت و از روی آن نمونه‌های دمبلی شکل تهیه و زیر آزمون کششی ASTM D 412 قرار گرفتند. هم‌چنین، آمیزه‌های مزبور در قالب فشاری قرار گرفته و به شکل قرص استوانه‌ای (به ترتیب با قطر و ارتفاع ۲۹ و ۱۴/۷ mm) پخت و زیر آزمون فشاری

از نرم افزار ABAQUS/Standard v. 6.8 [۱۴] انجام شد. مراحل پیش و پس پردازش نیز توسط نرم افزارهای ABAQUS/CAE و ABAQUS/Viewer انجام گرفتند. برای تعیین شبکه اجزای محدود مناسب از فن شبکه بندی انطباقی کمک گرفته شد. بدین ترتیب که ابتدا فضای هندسی دو نمونه به ترتیب به کمک اجزای سه بعدی چهاروجهی ۱۰ گره ای برای نمونه کششی و دوبعدی مثلثی متقارن محوری برای نمونه فشاری شبکه بندی شد (شکل های ۵ - الف و ب). برای نمونه دمبلی شکل با توجه به شکل هندسی، تغییر ابعاد سه جهتی و نیز تقارن موجود از اجزای سه بعدی استفاده و تنها یک نیمه از آن در مدل لحاظ شده است. شرط مرزی مورد استفاده ثابت فرض کردن یک طرف نمونه، اعمال شرط مرزی تقارن و تغییر مکان طولی به مقدار ۱۲۵ mm در طرف دیگر بود. برای نمونه قرص نیز با توجه به تقارن محوری هندسه و بارگذاری از اجزای دوبعدی متقارن محوری استفاده شد. از آن جا که اصطکاک بین سطوح فک های بالایی و پایینی با دو سطح بالا و پایین نمونه قرصی شکل نقش به سزایی در چگونگی تغییر شکل در قطعه و نیز توزیع تنش دارد، بنابراین شرایط مرزی از راه تعریف دو سطح صلب به قطعه اعمال شد. در این مدل ضرایب اصطکاک بین سطوح برابر ۰/۶ در نظر گرفته شدند. مقدار ضریب اصطکاک در این کار بر مبنای مقادیر گزارش شده در مراجع مختلف (از جمله مرجع [۱۵]) و نیز اثر کاهش ضریب اصطکاک با افزایش فشار [۱۶] انتخاب شده است. شرایط مرزی برای این مدل، به شکل ثابت فرض کردن صفحه صلب پایینی و اعمال تغییر مکان از راه صفحه صلب بالایی به مقدار ۲۵ درصد طول اولیه نمونه در نظر گرفته شده است.

شایان ذکر است، علت استفاده از اجزای سه بعدی چهار وجهی و دو بعدی مثلثی در آن بود که فن شبکه بندی انطباقی را نمی توان برای اجزای شش وجهی و چهار ضلعی با وجود کارایی بیشتر به کار گرفت. اما همان طور که بعداً نشان داده خواهد شد، با استفاده از مقایسه خطا که برای نخستین بار در این کار انجام گرفت، شبکه اجزای محدود انتخابی



شکل ۲- نمونه آزمون فشاری (ISO 7743) در دستگاه.

(کشش) انطباق نسبتاً خوبی با داده های تجربی نشان می دهند، در حالی که در ناحیه کرنش منفی (فشاری) مدل چند جمله ای مرتبه دوم در کرنش های زیاد دچار انحراف شدید شده و از این رو مدل مناسبی به شمار نمی آید. به همین دلیل در مراحل بعد این مدل از چرخه کار کنار گذاشته شد و محاسبات اجزای محدود با چهار مدل باقی مانده انجام گرفت. هم چنین، بهترین انطباق مربوط به مدل مارلو بود که در واقع برآزش این مدل به حالت مستقیم انجام شده است که با توجه به تناظر بین داده های کششی و مدل مکانیکی انطباق بسیار زیادی از خود نشان می دهند.

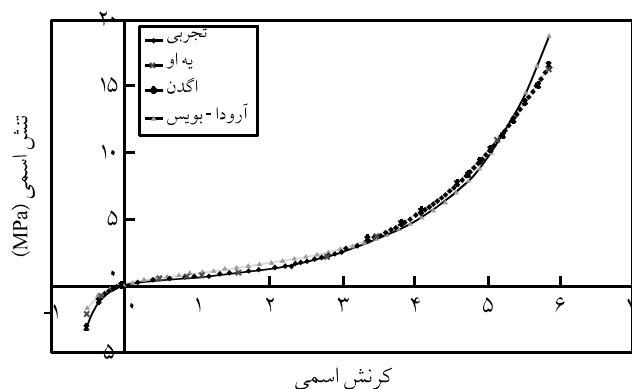
مدل اجزای محدود

محاسبات اجزای محدود در این کار پژوهشی روی دو نمونه لاستیکی مربوط به آزمون های کششی ASTM D 412 و ISO 7743 با استفاده

جدول ۱- پارامترهای مدل های مطالعه شده حاصل از برآزش غیر خطی.

مدل	C_{10}^*	C_{20}	C_{30}	C_{01}	C_{11}	C_{22}	λ_m	μ	μ_1	μ_2	μ_3	α_1	α_2	α_3
چند جمله ای مرتبه دوم	۰/۶۷۸	۰/۰۱۱۱۵	-	-۰/۱۹۱	۰/۰۴۲	-۰/۳۸۶	-	-	-	-	-	-	-	-
یه او	۰/۲۵۸۹	-۰/۰۰۲۸۴	۰/۰۰۰۲۲۸۹	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
آرودا - بویس	-	-	-	-	-	۳/۴۶	۰/۴۶	-	-	-	-	-	-	-
اگدن	-	-	-	-	-	-	-	۰/۰۸۷۷	۰/۰۰۴۲۵	۰/۰۴۲۵	۳/۱۹	۵/۶۹	-۱/۸۶	-

* واحد پارامتر یاد شده به همراه سایر پارامترهای مشابه مگاپاسکال است.

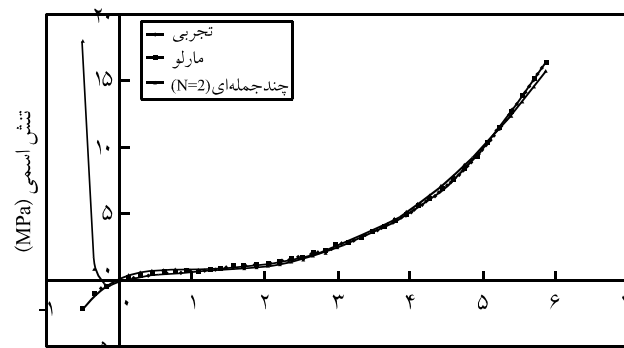


شکل ۴ - نمودار تنش - کرنش اسمی اندازه‌گیری شده از آزمون به همراه نمودارهای برازش شده با مدل‌های یه او، اگدن و آرودا - پویس.

به عنوان شبکه‌های مناسب تشخیص داده شده که در شکل‌های ۶-الف و ب نشان داده شده‌اند.

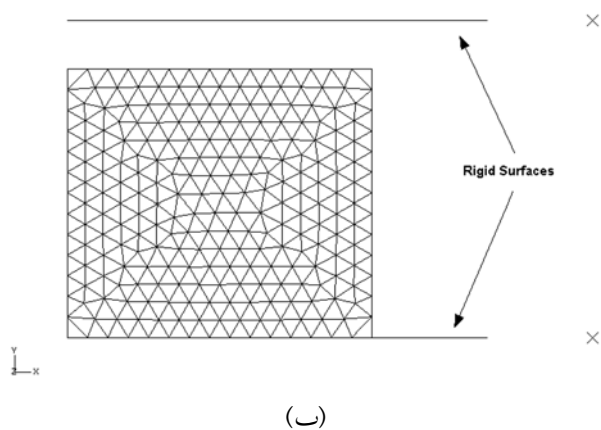
در گام بعد، به دلیل آن‌که اجزای سه بعدی شش وجهی ۲۰ گره‌ای و دوبعدی چهار ضلعی ۸ گره‌ای نسبت به اجزای قبلی کارایی بیشتری دارند و استفاده از آنها در تحلیل تنش لاستیک‌ها معمول‌تر است، از این رو دامنه هندسی دو نمونه با این نوع اجزای شبکه‌بندی شده و محاسبات بر اساس اجزای انتخابی جدید انجام شد (شکل‌های ۷-الف و ب).

با رسم نمودار نیرو برحسب تغییر مکان با اجزای چهار وجهی و شش وجهی برای نمونه کششی و چهار ضلعی و سه ضلعی برای نمونه فشاری و مقایسه با مقادیر تجربی (شکل‌های ۸-الف و ب) به راحتی دیده می‌شود که مدل‌های اجزای محدود انتخابی (نشان داده شده در شکل‌های ۷-الف و ب) هم‌ارز مدل‌های اجزای محدود معین شده با فن

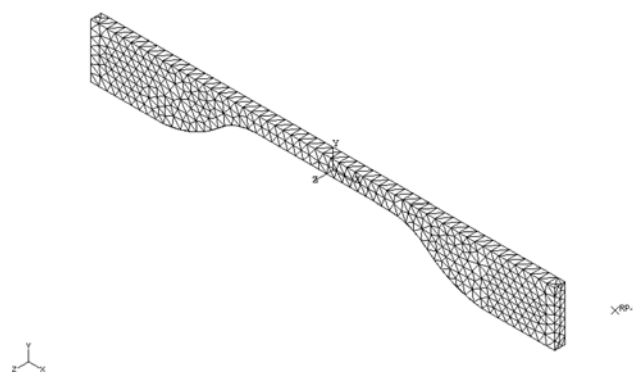


شکل ۳ - نمودار تنش - کرنش اسمی اندازه‌گیری شده از آزمون به همراه نمودارهای برازش شده با مدل‌های مارلو و چندجمله‌ای مرتبه دوم.

برای محاسبات نهایی از نوع شش وجهی و چهارضلعی با حفظ و رعایت میزان دقت و خطای محاسبه انتخاب شدند. محاسبات اجزای محدود بر اساس شبکه اجزای محدود نشان داده شده در شکل‌های ۵-الف و ب انجام شد. پس از آن، مقدار خطای محاسباتی بر پایه شاخص تنش معادل فون مایسس (von Mises) برای هر مدل معین شد. سپس، فنون شبکه‌بندی انطباقی به کار بسته شده و شبکه جدید برای هر دو مدل معین شد. پس از تکرار محاسبات با شبکه جدید مقدار میزان خطا بر پایه شاخص یاد شده محاسبه و این فرایند چند بار تکرار شد تا در نهایت شاخص مزبور برای دو مدل اجزای محدود سه بعدی (آزمون کششی) و دوبعدی (آزمون فشاری) به ترتیب به اعداد ۰/۷۵ و ۷۰/۴ درصد رسید که مقادیر کم و قابل قبولی هستند. از این رو، شبکه‌های ایجاد شده

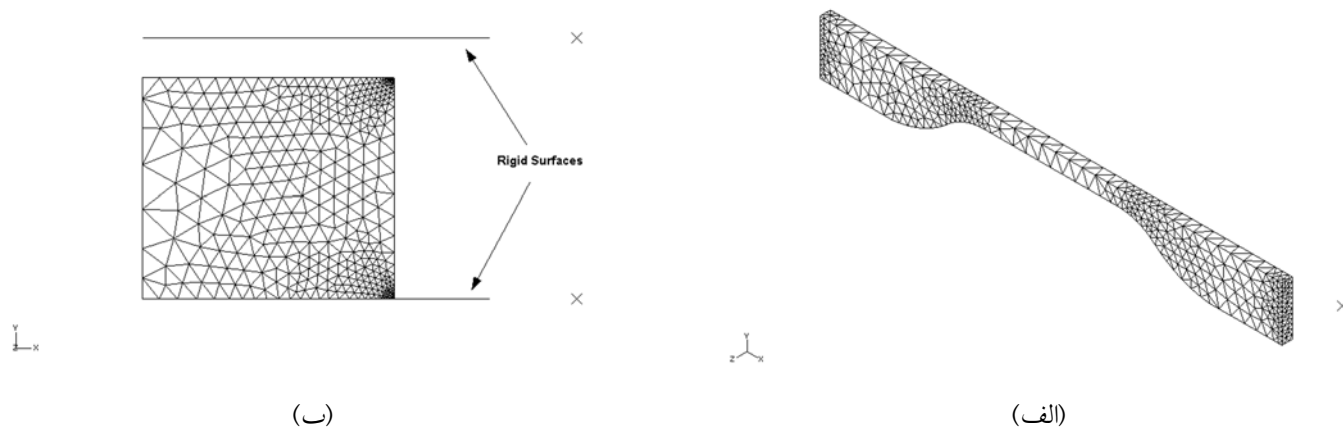


(ب)



(الف)

شکل ۵ - شبکه اجزای محدود اولیه برای نمونه: (الف) آزمون کششی با اجزای چهاروجهی و (ب) آزمون فشاری با اجزای مثلثی متقارن محوری همراه با سطوح صلب بالایی و پایینی.



شکل ۶- شبکه اجزای محدود نهایی به دست آمده برای نمونه: (الف) آزمون کششی با اجزای چهاروجهی و (ب) آزمون فشاری با اجزای مثلثی متقارن محوری همراه با سطوح صلب بالایی و پایینی.

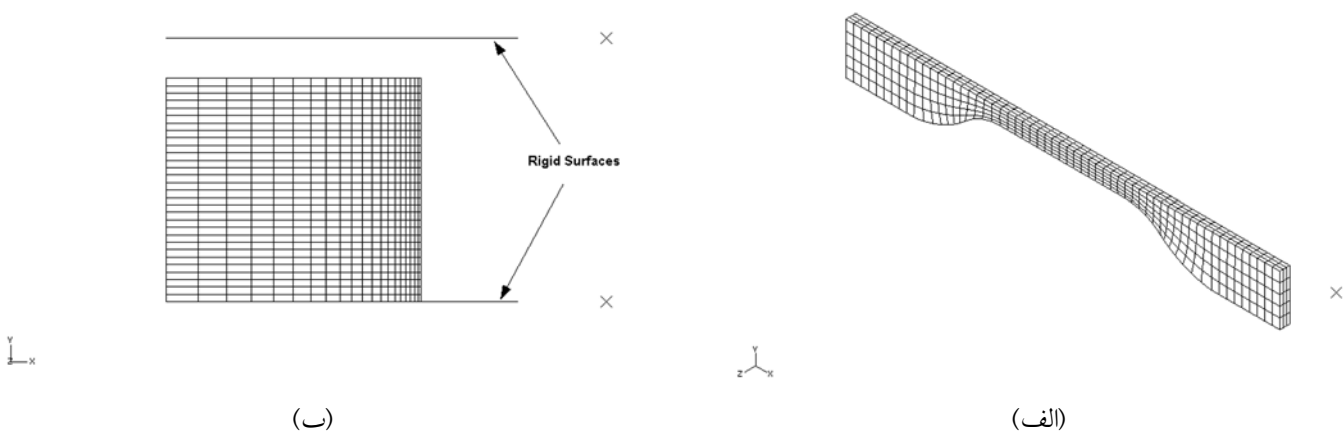
مناسبتی برخوردار بوده و نتایج به دست آمده از سه مدل دیگر دارای انحراف از حالت واقعی است. مطالعات عددی و تجربی پیشین حاکی از آن بودند که برای به کارگیری موفق یک مدل مکانیکی باید پارامترهای مدل از راه آزمون‌های چندبعدی نظیر کششی تک محوری، دو محوری و صفحه‌ای که به شکل هم زمان انجام می‌شوند، تعیین شوند (رجوع به مراجع [۱-۳]). اما از دیدگاه مهندسی و کاربردی انجام این آزمون‌ها پرهزینه و وقت‌گیر است و توجه پژوهش‌گران به سمت استفاده از مدل‌هایی معطوف شده است که بتوان تنها از یک آزمون ساده کششی پارامترهای لازم را به دست آورد.

نتایج نشان داده شده در شکل‌های ۱۰-الف و ب حکایت از آن دارند که حتی با مدل‌هایی همانند آرودا - بویس، که با این هدف توسعه

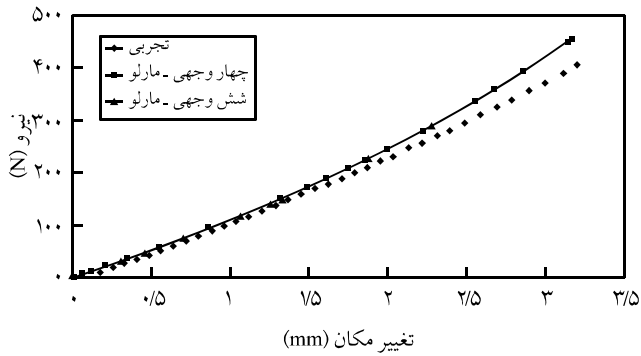
انطباقی (نشان داده شده در شکل‌های ۶-الف و ب) هستند. این موضوع با مقایسه بین توزیع تنش فون مایسس برای دو مدل یاد شده نیز کاملاً مشخص می‌شود که در شکل‌های ۹-الف و ب نشان داده شده‌اند.

نتایج محاسبات اجزای محدود

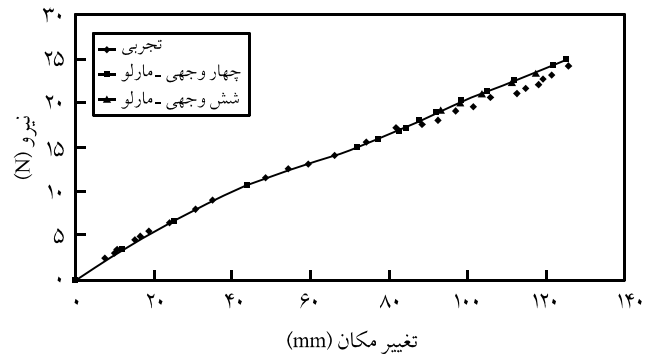
با تعیین نهایی شبکه‌های اجزای محدود، محاسبات برای دو نمونه با مدل‌های ابرکشسان انتخابی انجام و مقادیر نیرو و بر حسب تغییر مکان محاسبه و نمودارهای مربوط رسم که در شکل‌های ۱۰-الف و ب نشان داده شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در تغییر شکل‌های کوچک، هر چهار مدل از میزان انطباق نسبتاً خوبی با داده‌های تجربی برخوردار هستند. اما در تغییر شکل‌های بزرگ، تنها مدل مارلو از انطباق



شکل ۷- شبکه اجزای محدود انتخابی برای نمونه: (الف) کششی با اجزای شش‌وجهی و (ب) فشاری با اجزای چهارضلعی متقارن محوری همراه با سطوح بالایی و پایینی.

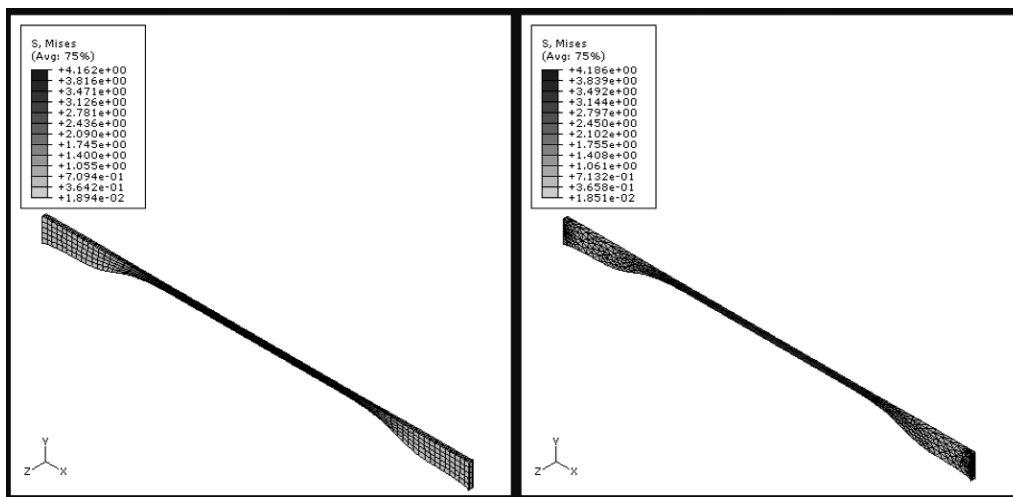


(ب)

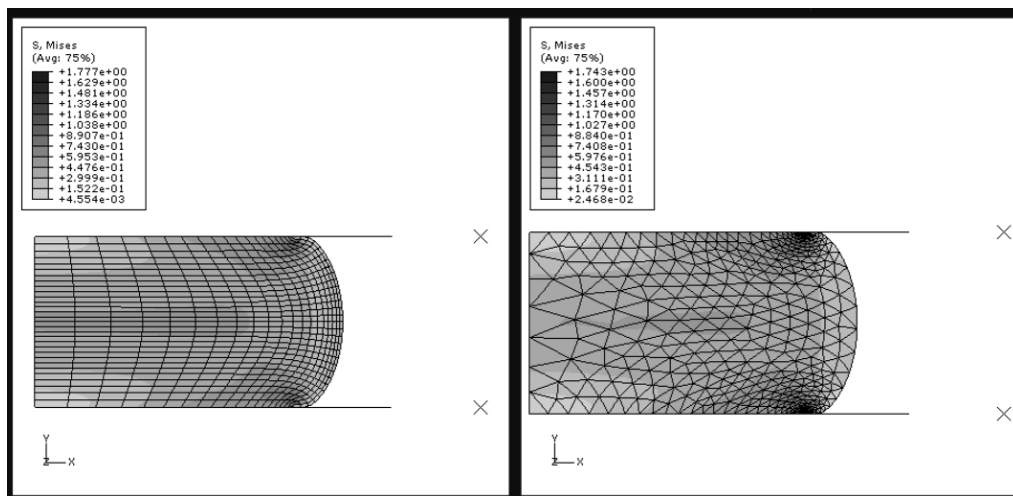


(الف)

شکل ۸ - نمودار نیروی اندازه‌گیری شده به همراه مقادیر محاسبه شده از شبکه‌های اجزای محدود نشان داده شده در شکل‌های ۶ - الف و ۷ - الف بر حسب: (الف) کشش برای نمونه آزمون کششی و (ب) تغییر شکل فشاری برای نمونه آزمون فشاری.

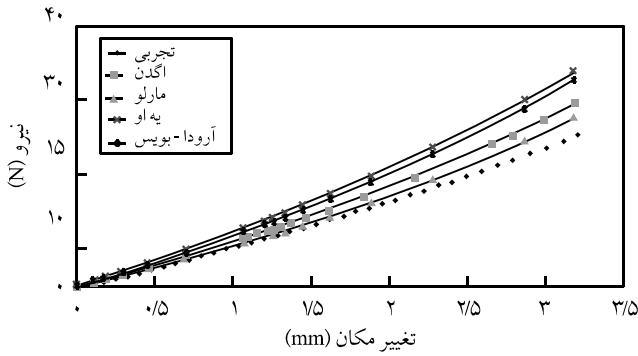


(الف)

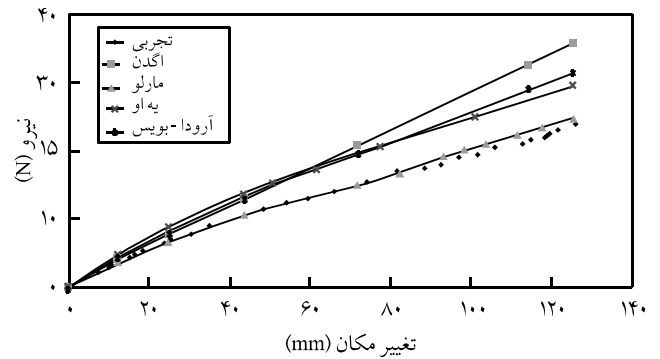


(ب)

شکل ۹ - توزیع تنش فون مایسس برای دو شبکه اجزای محدود نشان داده شده در شکل‌های ۶ و ۷ در حالت: (الف) کششی و (ب) فشاری.



(ب)



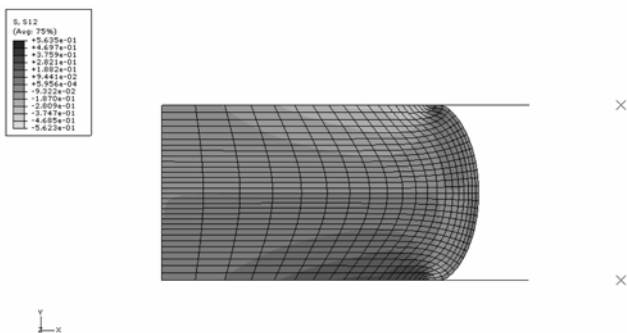
(الف)

شکل ۱۰ - نمودار نیروی اندازه‌گیری شده به همراه مقادیر محاسبه شده با مدل‌های ابرکشسان مختلف بر حسب: (الف) کشش برای نمونه آزمون کششی و (ب) تغییر شکل فشاری برای نمونه آزمون فشاری.

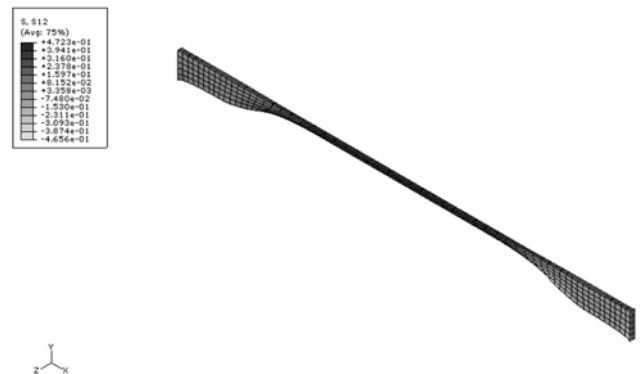
این دو نمونه این نکته را روشن می‌سازد که این فرض صحیح نیست. به عنوان مثال، توزیع تنش برشی صفحه‌ای برای دو نمونه مزبور در شکل‌های ۱۱-الف و ب نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تنش برشی دارای توزیعی ناهمگن به ویژه در ناحیه گوشه‌هاست که موجب بروز خطا و انحراف نتایج تجربی از حالت ایده‌آل می‌شود. این مسئله مهم‌ترین عامل انحراف نتایج به دست آمده از مدل مارلو با داده‌های تجربی است که به ویژه در تغییر شکل‌های بزرگ اهمیت زیادی دارد. مدل‌های یاد شده به طور کیفی و نسبی با یکدیگر مقایسه شده‌اند که در جدول ۲ نتایج آن آورده شده است. شایان ذکر است، مقایسه مزبور بر اساس داده‌های حاصل از دو آزمون کششی و فشاری تک محوری است که باید به هنگام ارزیابی کارایی این مدل‌ها مد نظر قرار گیرند.

یافته‌اند، نیز نمی‌توان به طور دقیق پیش‌بینی کرد و در تغییر شکل‌های بزرگ انحراف قابل ملاحظه‌ای نشان می‌دهد. این مدل حتی در رقابت با مدل یه‌او (Yeoh) از دقت کمتری برخوردار است. از سوی دیگر، در مدل مارلو بدون آن که با یک مدل ریاضی صریح (Explicit) بیان شود با ایجاد یک تناظر یک به یک بین ناوردهای اول محاسبه شده از داده‌های کششی و حالت واقعی تنش - کرنش در نمونه سعی می‌شود تا رفتار واقعی شبیه‌سازی شود. این نکته در شکل ۱۰-الف نشان داده شده است. اما، همین مدل در حالت فشاری (شکل ۱۰-ب) در تغییر شکل‌های بزرگ دچار انحراف شده که می‌تواند به عنوان یک نکته منفی در توانایی این مدل برای بارگذاری‌های فشاری باشد.

مطلب مهم دیگری که در این جا لازم است، بررسی شود فرض یک بعدی تغییر شکل در آزمون‌های یاد شده است. نگاهی به توزیع تنش در



(ب)



(الف)

شکل ۱۱ - توزیع تنش برشی در نمونه: (الف) آزمون کششی و (ب) آزمون فشاری.

حالت کششی کمتر است. افزون بر آن، توزیع تنش‌های به دست آمده نیز مابین آن است که فرض یک بعدی بودن تغییر شکل و صرف نظر کردن از سایر مولفه‌ها (به ویژه مولفه برشی) می‌تواند از سایر عوامل بروز خطا باشد. در مجموع چنین می‌توان نتیجه گرفت، استفاده از مدل مارلو می‌تواند بهترین گزینه برای کاربردهایی باشد که در آنها بارگذاری به شکل عمده (کششی یا فشاری) است، مشروط بر آن که داده‌های کششی مربوط در دسترس باشند. به عبارت دیگر، برخلاف سایر مدل‌های مکانیکی نمی‌توان بدون داشتن این داده و صرفاً با انتخاب پارامترهای مدل ماده نسبت به شبیه‌سازی اقدام کرد.

اختصارات

C_{ij} پارامترهای مدل ابرکشسان چندجمله‌ای در حالت عمومی

W چگالی انرژی کرنشی

I_1 و I_2 ناورداهای اول و دوم تانسور کرنش

α_i پارامترهای مدل اگدن

λ_m ضریب کشیدگی قفل شده (مدل آرودا - بویس)

λ نسبت‌های کشیدگی

μ مدول برشی اولیه (مدل آرودا - بویس)

μ_i پارامترهای مدل اگدن

مراجع

- Morman K.N. and Pan T.Y., Application of Finite Element Analysis in the Design of Automotive Elastomeric Components, *Rubber Chem. Technol.*, **61**, 503-533, 1988.
- Nicholson D.W. and Nelson W.N., Finite Element Analysis in Design with Rubber, *Rubber Chem. Technol.*, **63**, 368-406, 1990.
- Nicholson D.W., Nelson N.W., Lin B., and Farinella A., Finite Element Analysis of Hyperelastic Components, *Appl. Mech. Rev.*, **51**, 303-320, 1998.
- Muhr A.H., Modeling the Stress-Strain Behavior of Rubber, *Rubber Chem. Technol.*, **78**, 391-425, 2005.
- Beda T., Modeling Hyperelastic Behavior of Rubber: A Novel Invariant-Based and a Review of Constitutive Models, *J. Polym. Sci., Part B: Polym. Phys.*, **45**, 1713-1732, 2007.
- Finney R.H. and Kumar A., Development of Material Constants for Nonlinear Finite Element Analysis, *Rubber Chem. Technol.*, **61**, 879-891, 1988.
- Li-Rong W. and Zhen-Hua L., Modeling Method of Constitutive

جدول ۲ - مقایسه کیفی مدل‌های مورد استفاده بر مبنای داده‌های آزمون‌های کششی و فشاری تک محوری.

نوع بارگذاری		مدل
فشاری	کششی	
غیر قابل قبول	غیر قابل قبول	چند جمله‌ای مرتبه دوم
ضعیف	متوسط	یه‌او (Yeoh)
ضعیف	ضعیف	آرودا - بویس (Arruda-Boyce)
متوسط	ضعیف	اگدن (Ogden)
نسبتاً خوب تا خوب	خوب تا خیلی خوب	مارلو (Marlow)

نتیجه‌گیری

در این پژوهش، کارایی پنج مدل مکانیکی ابرکشسان در پیش‌بینی رفتار کششی و فشاری یک آمیزه لاستیکی پخت شده از راه شبیه‌سازی عددی و مقایسه نتایج با داده‌های تجربی مورد سنجش قرار گرفت. نتایج حاصل حاکی از آن است، که مدل مکانیکی مارلو بهترین انطباق را در حالت کششی ایجاد می‌کند. در حالت فشاری نیز همین مدل بیشترین انطباق را در مقایسه با سایر مدل‌ها دارد، هر چند مقدار آن در مقایسه با

Law of Rubber Hyperelasticity Based on Finite Element Simulations, *Rubber Chem. Technol.*, **76**, 271-285, 2003.

- Ghasemi I., Karrabi M., and Ghoreishy M.H.R., Investigation into Stress-Strain Behaviour of Organoclay SBR Composite Using Different Constitutive Models, *Plast. Rubber Compos.*, **37**, 305-310, 2008.

- Yeoh O.H., Some Forms of the Strain Energy Function for Rubber, *Rubber Chem. Technol.*, **66**, 754-771, 1993.

- Arruda E.M. and Boyce M.C., A Three-Dimensional Constitutive Model for the Large Stretch Behavior of Rubber Elastic Materials, *J. Mech. Phys. Solids*, **41**, 389-412, 1993.

- Ogden R.W., Recent Advances in the Phenomenological Theory of Rubber Elasticity, *Rubber Chem. Technol.*, **59**, 361-383, 1986.

- Marlow R.S., *Constitutive Models for Rubber III*, Busfield and Muhr (Eds.), Swets and Zeitlinger, Lisse, 2003.

- Ghoreishy M.H.R., A Parametric Study on the Effect of the Rim Diameter in a Radial Tire Performance Using Finite Element

- Method, *Iran. Rubber Magazine*, **13**, 4-12, 2008.
14. ABAQUS, Version 6.8, 2008.
15. Blau P.J., *Friction Science and Technology from Concepts to Applications*, 2nd ed., CRC, Boca Raton, FL, 2009.
16. Lazaeration J.J., Determination of the Coefficient of Friction of Rubber at Realistic Tire Contact Pressures, *Rubber Chem. Technol.*, **60**, 966-974, 1987.