



چکیده

در این پژوهش، مدلی ریاضی برای مدل‌سازی جریان مذاب‌های پلیمری در ناحیه حدیده اکسترودر ارائه شده است. این مدل برای مذاب‌های پلیمری با رفتار رئولوژیکی قانون‌توانی توسعه داده شده و اثر گرانیروی مذاب پلیمری بر دقت تحلیل مدل، مورد ارزیابی قرار گرفته است. معادلات حاکم برای سیالات غیرنیوتنی که از مدل قانون‌توانی تبعیت می‌کنند، با استفاده از روش اجزای محدود حل شده است. بدین منظور، روش استاندارد گلرکین و روش ترکیبی برای حل معادلات جریان به کار گرفته شده است. به منظور امکان شبکه‌بندی هندسه‌های پیچیده، این مدل بر اساس استفاده از اجزای هرمی توسعه داده شده و اجزای هرمی چهار وجهی ۱۰ و ۴ گره‌ای به ترتیب برای محاسبه سرعت و فشار به کار رفته است. با توجه به غیر خطی بودن معادلات، از روش تکرار پیکارد برای حل معادلات استفاده شده است. در نهایت با استفاده از مدل به دست آمده، جریان مذاب سه نوع پلی اتیلن با گرانیروی‌های مختلف از درون حدیده اکسترودر تک‌پیچی، شبیه‌سازی و برای بررسی اعتبار آن، نتایج مدل‌سازی با نتایج تجربی مقایسه شد.

واژه‌های کلیدی

شبیه‌سازی، روش ترکیبی، حدیده، اجزای محدود، اجزای هرمی

*مسئول مکاتبات، پیام‌نگار:

m.h.r.ghoreishy@ippi.ac.ir

3-Dimensional Modeling of Flow of Polymeric Fluids with Various Viscosities in an Extrusion Die Using Mixed Method and Tetrahedral Elements

H. Sobhani, M.H.R. Ghoreishy, and M. Razavi-Nouri

Iran Polymer and Petrochemical Institute, P.O. Box: 14965/115, Tehran, Iran

Received 12 March 2008; accepted 19 April 2008

Abstract

This research work is devoted to the development of a mathematical model for the simulation of the flow of polymeric melts through the die region of extruders. A set of governing equations are solved using finite element method. Standard Galerkin technique is used in conjunction with the mixed scheme to solve the flow equation. Due to the non-linear nature of global equations, the Picard iteration method is used. The well-known power-law equation was used to describe non-Newtonian rheological behavior of the material and the effect of viscosity on the accuracy of model was investigated. In order to create a finite element mesh for the complex geometries of the die, tetrahedral elements were used. Therefore, the second order tetrahedral elements (10 nodes) and the first order tetrahedral elements (4 nodes) were used for calculation of velocity and pressure, respectively. To show the applicability of the model, the flow of the polyethylene melts with various viscosities through the die of a single screw extruder were simulated. The validity of the present technique under realistic conditions was confirmed by comparing the model simulation results with the experimental data.

Key Words

simulation, mixed method, die, finite element, tetrahedral element

(* To whom correspondence should be addressed.

E-mail: m.h.r.ghoreishy@ippi.ac.ir

مقدمه

فرایند اکستروژن به عنوان یکی از فرایندهای مهم در شکل دهی پلاستیک ها و لاستیک ها جایگاه مهمی را در صنایع پلیمر به خود اختصاص داده است. به طوری که بخش عمده ای از محصولات پلیمری به طور مستقیم یا غیرمستقیم به کمک این فرایند تولید می شوند. به عنوان مثال انواع لوله ها، پروفیل ها و اجزای اصلی تایر به کمک فرایند اکستروژن ساخته می شوند. افزون بر این، سایر فرایندهای اصلی شکل دهی نظیر تزریق، قالب گیری دمشی و تولید فیلم نیز وابسته به این فرایند هستند. به طور کلی، این فرایند از دو بخش تشکیل شده است. بخش نخست یا اصلی این فرایند از اکسترودری (تک پیچی یا دو پیچی) تشکیل شده که در نتیجه چرخش پیچ ها درون پوسته (barrel) عمل پمپ کردن و هدایت سیال (مذاب) پلیمری را به درون حدیده انجام می دهد.

بخش دوم شامل مجموعه حدیده است که برای هدایت و شکل دهی مذاب خروجی به شکل محصول نهایی طراحی شده است. شبیه سازی این فرایند به ویژه به وسیله نرم افزارهای رایانه ای همواره مورد توجه پژوهشگران و مهندسان این عرصه بوده و تاکنون مطالب فراوانی در این خصوص منتشر شده است. این شبیه سازی ها نیز به دو گروه مدل سازی جریان درون اکسترودر و نیز مدل سازی جریان درون حدیده دسته بندی می شوند. به طور کلی، هدف از شبیه سازی و تحلیل جریان در حدیده اکسترودر طراحی یا راهبری بهینه است. مهم ترین اهدافی که در این میان همواره مدنظر بوده است، عبارتند از:

- حذف نقاط ساکن و ایستا به منظور کاهش زمان اقامت و حذف احتمال تخریب یا سوختن آمیزه یا مذاب،
 - ایجاد یک نیم رخ (پروفایل) فشار مناسب،
 - حفظ توزیع یکنواخت دما در مذاب پلیمری و
 - کاهش مقدار تورم حدیده به حداقل مقدار ممکن.
- به منظور تأمین شرایط گفته شده معمولاً طراحی ها به گونه ای است که حدیده ها هندسه پیچیده ای دارند. از سوی دیگر، رفتار رئولوژیکی مذاب های پلیمری غیر نیوتنی است که این موضوع موجب پیچیدگی شبیه سازی و تحلیل دقیق جریان می شود. از این رو، تلاش های زیادی برای توسعه مدل های ریاضی مبتنی بر استفاده از روش های عددی برای شبیه سازی جریان سیالات (مذاب های) پلیمری در حدیده اکسترودر انجام شده است. روش های تحلیلی و عددی ساده از قبیل تفاضل محدود و حجم محدود به دلیل عدم توانایی در لحاظ کردن پیچیدگی های یاد شده قادر به تحلیل دقیق جریان نیستند. در این میان، روش اجزای محدود به دلیل قابلیت استفاده در اشکال هندسی پیچیده و

نیز دقت بیشتر در پیش بینی متغیرهای وابسته، به عنوان روشی مناسب برای تحلیل جریان درون حدیده اکسترودر مطرح است [۱].

نگاهی اجمالی به مقالات منتشر شده در این زمینه [۱۰-۲۰] حاکی از آن است که اگرچه روش های اجزای محدود موجود قابلیت بسیار خوبی را در شبیه سازی سه بعدی جریان درون حدیده (و نیز سایر میدان های جریان) دارند، اما همگی بر اساس استفاده از اجزای شش وجهی (hexahedral/cubic) ارائه شده اند. این اجزا با وجود داشتن قابلیت های گفته شده قادر به شبکه بندی میدان های جریان پیچیده، که در طراحی و ساخت حدیده اکسترودر به وفور ملاحظه می شود، نیستند. از این رو، توسعه روش های اجزای محدودی که بر پایه شبکه بندی میدان جریان با استفاده از اجزای هرمی چهاروجهی قرار داشته باشند، می تواند گام مهمی در کاربردی تر کردن روش اجزای محدود در این حوزه از مهندسی پلیمر به شمار آید.

در این پژوهش، با استفاده از روش های اجزای محدود ترکیبی و هرمی چهاروجهی مدلی برای تحلیل جریان سیالات پلیمری با رفتار رئولوژیکی غیر نیوتنی ارائه شده است، که از مدل قانون توانی تبعیت می کنند. با توجه به این که رفتار رئولوژیکی سیالات پلیمری در سرعت های برش زیاد به سمت رفتارهای نیوتنی میل می کند و امکان ایجاد خطاهای محاسباتی وجود دارد، برای بررسی کارایی این مدل، جریان سه مذاب پلی اتیلن با گرانروی های مختلف در تک پیچی متصل برشی متفاوت از درون حدیده ای که به یک اکسترودر تک پیچی متصل است، مورد تحلیل قرار گرفته و در نهایت به منظور تعیین اعتبار مدل سازی، نتایج عددی با مقادیر فشار و دبی اندازه گیری شده از این حدیده با یک دیگر مقایسه شده اند.

مهم ترین فرضیات اولیه ای که در این مدل سازی در نظر گرفته شده اند، عبارتند از:

- ۱- جریان پلیمر در سراسر طول حدیده لایه ای بوده و سیال تراکم ناپذیر است.
 - ۲- رفتار رئولوژیکی سیال از مدل قانون توانی پیروی می کند.
 - ۳- با توجه به پیچیدگی جریان درون حدیده، جریان به شکل سه بعدی در نظر گرفته شده است.
 - ۴- جریان سیال به حالت پایاست.
 - ۵- با توجه به این که اندازه گیری دما بیانگر تغییرات اندک دما در جهت طولی (1°C) حدیده است، جریان مذاب به شکل هم دما در نظر گرفته شده است.
 - ۶- فشار خروجی مذاب برابر با فشار جو و سرعت مذاب روی دیواره ها صفر است.
- در این مقاله، ابتدا مدل ریاضی و سپس معادلات اجزای محدود مرتبط با

این مسئله تشریح شده، سپس در ادامه نتایج محاسبه شده از مدل سازی و مقایسه آن با نتایج تجربی ارائه می شوند.

مروری بر مدل سازی های انجام شده

از میان کارهای انجام شده برای مدل سازی جریان سیالات پلیمری در حدیده های اکسترودر می توان به کار پیتمن و همکاران [۲] اشاره کرد. در این پژوهش، مدل سازی دو بعدی جریان مذاب پلیمری با رفتار رئولوژیکی قانون توانی به طور ناهم دما در حدیده ای تخت با هدف طراحی و ساخت آن انجام شده است. برای انجام این کار از روش عددی اجزای محدود ترکیبی با اجزای مربعی استفاده شده است. در نهایت، توزیع فشار در طول حدیده و اثر آن بر مقدار تاب خوردگی مکانیکی حدیده محاسبه شده است.

تانوی و همکاران [۳] جریان مذاب پلیمری با رفتار رئولوژیکی قانون توانی را در حدیده آنالوس با هدف بررسی مقدار تورم حدیده مدل کردند. این مدل سازی با استفاده از روش اجزای محدود و با در نظر گرفتن فرض های ساده سازی از قبیل دو بعدی در نظر گرفتن جریان و استفاده از اجزای مربعی انجام شده است.

لیو و همکاران [۴] جریان سیال بینگهام پلاستیک را در حدیده ای T شکل (T-die) شبیه سازی کردند. این شبیه سازی به شکل سه بعدی با استفاده از روش اجزای محدود و اجزای مکعبی انجام شده است. ارائه توزیع سرعت و فشار در طول حدیده نتیجه این شبیه سازی بوده است. همچنین، این گروه در پژوهشی دیگر [۵] توزیع انتقال گرما برای یک سیال پلیمری با رفتار رئولوژیکی قانون توانی را در حدیده ای تخت به شکل سه بعدی شبیه سازی کردند. در این شبیه سازی نیز از اجزای مکعبی برای شبکه بندی مسیر جریان استفاده شده است.

کرو و همکاران [۶] با استفاده از دو روش ریاضی شبکه تحلیل جریان (flow analysis network, FAN) و اجزای محدود با استفاده از اجزای مکعبی، جریان سیال قانون توانی را درون حدیده تولید پروفیل به شکل سه بعدی مدل کردند. برای تعیین اعتبار مدل سازی، این نتایج با نتایج تجربی برای مذاب پلی اتیلن و پلی وینیلیدن کلرید مورد مقایسه قرار گرفته است. بر اساس نتایج به دست آمده، روش اجزای محدود دقت بیشتری دارد. اما، در این روش حجم و زمان محاسبات افزایش می یابد. لاوال و همکاران [۷] جریان سیال قانون توانی را در حدیده آنالوس ستاره ای شکل که به اکسترودر دوپیچی متصل است، بررسی کرده اند. آنها روش اجزای محدود و روش پنالتی پیوسته را به کار گرفتند. اجزای مورد استفاده در این کار مکعبی بوده و در نتیجه فرضیاتی برای ساده سازی شکل هندسی در نظر گرفته شده است. فشار و دبی خروجی از مدل سازی با نتایج تجربی مقایسه شد که توافق نسبتاً خوبی با نتایج

تجربی نشان می دهد.

قریشی و همکاران [۸] با استفاده از روش اجزای محدود و روش پنالتی (penalty) پیوسته جریان سیال پلیمری را با رفتار رئولوژیکی قانون توانی در حدیده متصل به اکسترودر تک پیچی مدل کردند. این مدل سازی به شکل سه بعدی و با فرض هم دما بودن مذاب در طول حدیده و با استفاده از اجزای مکعبی انجام شده است. فشار و دبی محاسبه شده در این مدل سازی توافق خوبی با نتایج تجربی نشان می دهد. این گروه در پژوهشی دیگر [۹]، این مدل سازی را برای حالت ناهم دما در ناحیه سنجش اکسترودر تک مارپیچی و ناحیه حدیده انجام دادند. روش ریاضی و اجزای مورد استفاده در این پژوهش نیز مشابه کار قبلی بود.

کالیون و همکاران [۱۰] جریان یک سیال قانون توانی را درون اکسترودر دوپیچی ناهمسوگرد و ناحیه حدیده متصل به آن مدل سازی کردند. این شبیه سازی به شکل سه بعدی، ناهم دما و با استفاده از روش اجزای محدود و روش پنالتی پیوسته انجام شده است. در این کار نیز با ساده تر در نظر گرفتن هندسه جریان از اجزای مکعبی استفاده شده است.

مدل ریاضی

معادلات حاکم بر جریان لایه ای سیال غیرنیوتنی تراکم ناپذیر در حالت پایا و در مختصات کارتزین سه بعدی عبارتند از [۱۱،۱۲]:
معادله پیوستگی:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

معادلات حرکت:

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x \quad (2)$$

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \rho g_y \quad (3)$$

چند مرحله است که عبارتند از:

- ۱- تقسیم دامنه مسئله به اجزای محدود
- ۲- انتخاب یک تابع تقریب زنی مناسب
- ۳- تعیین روش مناسب برای شکل تضعیف شده (weak form) معادلات ديفرانسیل و استخراج ماتریس های سفتی هر جزء و بردار بار
- ۴- سوار کردن (assembling) ماتریس های سفتی و بردار بار اجزا و تعیین ماتریس سفتی و بردار بار کل (global)
- ۵- اعمال شرایط مرزی مناسب
- ۶- حل معادلات کل مجموعه و تعیین مقادیر مجهول در گره ها

در اغلب موارد اجزای مورد استفاده با توجه به شرایط فیزیکی مسئله و همچنین روش حل انتخابی، مشخص و معین می شوند. در واقع درجه های آزادی مورد نیاز، شکل هندسی دامنه، دقت مورد انتظار و روش استخراج معادله ها، انتخاب نوع جزء را برای گسسته سازی معین می کنند. از انواع اجزای مرسوم مورد استفاده در مسائل سه بعدی می توان به اجزای هرمی و مکعبی اشاره کرد. مهم ترین مزیت اجزای هرمی چهاروجهی نسبت به سایر انواع اجزا، قابلیت آنها در شبکه بندی اشکال هندسی پیچیده است، به نحوی که در برخی مسائل پیچیده امکان شبکه بندی تنها با استفاده از این نوع اجزا مقدور است. به طور مثال شبکه بندی مسیر جریان درون یک اکسترودر وقتی که انحنای کامل پیچ ها در نظر گرفته می شود، فقط با اجزای هرمی چهاروجهی امکان پذیر است.

از سوی دیگر، نتایج حاصل از مطالعات عددی و تجربیات شبیه سازی نشان می دهد که هر جزء مکعبی در ساده ترین حالت به ۱۲ جزء هرمی چهاروجهی تبدیل می شود، بنابراین تعداد اجزا افزایش می یابد که این موضوع موجب افزایش دقت در حل مسئله می شود. افزون بر این، زمان و حجم محاسبات نیز به دلیل ازدیاد تعداد اجزا افزایش می یابد. بنابراین در این مدل سازی با توجه به شکل هندسی پیچیده حدیده و همچنین نیاز به دقت زیاد برای تحلیل جریان مذاب پلیمر در آن، از اجزای هرمی چهاروجهی استفاده شده است. همچنین، دو روش اجزای محدود پنالتی و ترکیبی برای حل مسائل مکانیک سیالات به کار گرفته شده است. اساس روش پنالتی حذف متغیر فشار از معادلات حرکت با استفاده از معادله پیوستگی است. بدین منظور، می توان فشار را به شکل زیر بیان کرد:

$$p = -\lambda^* \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (9)$$

* λ به پارامتر پنالتی معروف است که اگر این پارامتر عدد نسبتاً بزرگی انتخاب شود، می تواند معادلات پیوستگی را ارضا کند. در مسائل

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \quad (4)$$

که در این معادلات v_x ، v_y و v_z اجزای x ، y و z بردار سرعت، p فشار، ρ چگالی و g_x ، g_y و g_z مؤلفه های x ، y و z شتاب جاذبه هستند. τ_{xx} و τ_{xy} ... نیز اجزای تانسور تنش اند که برای سیال نیوتنی عمومی از معادله زیر به دست می آید:

$$\underline{\underline{\tau}} = \eta \underline{\underline{\Delta}} \quad (5)$$

که τ و Δ به ترتیب تانسور تنش و تانسور سرعت تغییر شکل اند. η گراندروی برشی سیال غیر نیوتنی است که برای سیال قانون توانی به شکل زیر بیان می شود:

$$\eta = \eta_0 \left(\frac{n-1}{2} I_2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

η_0 پایداری (قوام) سیال، n ثابت قانون توانی و I_2 تغییرناپذیر (invariant) دوم تانسور سرعت تغییر شکل است که به شکل زیر تعریف می شود:

$$I_2 = \left(2 \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(2 \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 \quad (7)$$

در ضمن، Δ تانسور سرعت تغییر شکل در حالت سه بعدی به شکل زیر بیان می شود:

$$\begin{bmatrix} 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} & 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} & 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (8)$$

معادلات اجزای محدود

حل کلاسیک یک مسئله با استفاده از روش اجزای محدود متشکل از

$$0 = \int_{\Omega} w_3 \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial z} (2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right] + \\ & \rho \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \end{aligned} \right\} dx dy dz \quad (13)$$

$$0 = \int_{\Omega} w_4 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (14)$$

که w_1, w_2, w_3, w_4 به ترتیب چهار تابع وزنی مختلف اند. انتخاب مناسب این توابع بسیار حائز اهمیت است و کلید اصلی در حل دقیق معادلات به شمار می آید. از نقطه نظر فیزیکی با توجه به این که معادله (۱۱)، معادله حرکت بوده و بیانگر نیروست، بنابراین w_1 باید شبیه v_x باشد، به طوری که حاصل ضرب $w_1 \cdot \rho g_x$ بیانگر توان باشد. به طور مشابه w_2 و w_3 باید به ترتیب شبیه v_y و v_z باشند. از طرف دیگر، w_4 باید شبیه نیرویی باشد که باعث تغییر حجم شده که خود تحت تأثیر فشار هیدروستاتیک رخ می دهد. بنابراین، w_4 مشابه $-P$ است.

در مرحله بعد شکل تضعیف شده معادله های یاد شده با استفاده از قضیه دیورژانس (divergence theorem) به دست می آید. در این دامنه اجزا به دو ناحیه Ω (ناحیه درونی) و Γ (ناحیه مرزی) تقسیم می شود. لازم است، قبل از نوشتن معادله های (۱۵) تا (۱۸) ابتدا شکل تضعیف شده نوشته شود. پس از این مرحله مشاهده می شود که متغیرهای سرعت در امتداد مرزهای اجزا پیوسته اند، ولی متغیر فشار متغیری نقطه ای است که در امتداد مرزهای اجزا ناپیوسته است. از این رو، پیوستگی های مختلف برای درون یاب های میدان فشار و سرعت وجود دارد:

$$v_x = \sum_{j=1}^n v_{xj}^e \phi_j \quad (15)$$

$$v_y = \sum_{j=1}^n v_{yj}^e \phi_j \quad (16)$$

$$v_z = \sum_{j=1}^n v_{zj}^e \phi_j \quad (17)$$

$$p = \sum_{j=1}^m p_j^e \phi_j \quad (18)$$

سیالات غیرنیوتنی برای ارضا و اعمال پیوستگی باید تعادلی بین گرانشی و پارامتر پنالته برقرار شود. برای این منظور، مقدار λ^* به شکل تابعی از گرانشی پیشنهاد شده تا معادله پیوستگی به طور یکنواخت در کل دامنه جریان اعمال شود. یعنی:

$$\lambda^* = \eta \lambda \quad (10)$$

که در این معادله η گرانشی و λ عددی بزرگ و مثبت است که به وسیله روش سعی و خطای عددی محاسبه می شود. به طور عمومی $10^{12} \mu - 10^4 \mu = \lambda$ نتایج خوبی را ارائه می کند.

حذف فشار به عنوان مقداری اولیه در روش پنالته می تواند به دور روش انجام شود. این روش ها عبارتند از: پنالته پیوسته که در آن فشار در معادلات حرکت به طور مستقیم به کمک معادله (۹) جایگزین شده و روش پنالته گسسته که در این روش ابتدا معادله (۹) به شکل گسسته درآمده و سپس در معادلات حرکت جایگزین می شود. در هر دو حالت تعیین مقدار فشار به کمک محاسبات ثانویه که به نام روش بازیابی تغییرات خوانده می شود، انجام می گیرد. در روش پنالته حجم محاسبات و عملیات رایانه ای کاهش می یابد. به همین دلیل در این پژوهش، ابتدا این روش به عنوان روش مناسب مد نظر قرار گرفت، ولی نتایج به دست آمده نشان داد که این روش قابلیت تحلیل دقیق جریان را با اجزای هرمی چهاروجهی ندارد و جواب های ناپایداری برای فشار ارائه می کند. به همین دلیل از این روش، صرف نظر و روش ترکیبی جایگزین آن شد.

برای اعمال روش اجزای محدود ترکیبی، ابتدا مؤلفه های تنش در معادلات (۲) تا (۴) از روی معادله ماتریسی (۸) جایگزین شده و سپس معادلات (۲) تا (۴) جدید به همراه معادله پیوستگی (۱) در چهار تابع وزنی ضرب و انتگرال عبارت حاصل روی دامنه یک جزء مینا برابر صفر قرار داده می شود:

$$0 = \int_{\Omega} w_1 \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial x} (2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] + \\ & \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \end{aligned} \right\} dx dy dz \quad (11)$$

$$0 = \int_{\Omega} w_2 \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial y} (2\eta \frac{\partial v_y}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right] + \\ & \rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} - \rho g_y \end{aligned} \right\} dx dy dz \quad (12)$$

$$(K^{32})_{ij} = \iiint_{\Omega} \left\{ \eta \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right\} dx dy dz \quad (29)$$

$$(K^{33})_{ij} = \iiint_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} & \eta \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \eta \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + 2\eta \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \\ & + \rho \phi_i (\bar{v}_x \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \phi_j}{\partial z}) \end{aligned} \right\} dx dy dz \quad (30)$$

$$(K^{34})_{ij} = \iiint_{\Omega} \left\{ \eta \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \phi_j \right\} dx dy dz \quad (31)$$

$$(K^{41})_{ij} = - \iiint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) \phi_j \right\} dx dy dz \quad (32)$$

$$(K^{42})_{ij} = - \iiint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right) \phi_j \right\} dx dy dz \quad (33)$$

$$(K^{43})_{ij} = - \iiint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right) \phi_j \right\} dx dy dz \quad (34)$$

$$(K^{44})_{ij} = 0 \quad (35)$$

$$(F^1)_i = \int_{\Gamma} \phi_i (-pn_x + \tau_{xx}n_x + \tau_{yx}n_y + \tau_{zx}n_z) d\Gamma \quad (36)$$

$$(F^2)_i = \int_{\Gamma} \phi_i (-pn_y + \tau_{xy}n_x + \tau_{yy}n_y + \tau_{zy}n_z) d\Gamma \quad (37)$$

$$(F^3)_i = \int_{\Gamma} \phi_i (-pn_z + \tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \tau_{zz}n_z) d\Gamma \quad (38)$$

در معادلات بالا n_x ، n_y و n_z به ترتیب بردارهای عمود بر مرز اجزا و \bar{v}_x ، \bar{v}_y و \bar{v}_z نیز مقادیر سرعت متوسط هستند [۱۸-۱۲].

انتخاب اجزای مناسب

همان طور که تاکنون مطرح شد، در روش ترکیبی متغیرهای سرعت در امتداد مرزهای اجزا پیوسته اند، ولی متغیر فشار متغیری نقطه ای است که در امتداد مرزهای اجزا ناپیوسته است. به همین دلیل باید از توابع درون یاب و اجزایی با درجه های متفاوت برای متغیرهای سرعت و فشار استفاده کرد. از این رو، اجزای خانواده Taylor-Hood به عنوان اجزایی مناسب برای روش ترکیبی معرفی شده اند.

شکل ۱ اجزای هرمی و مکعبی Taylor-Hood را نشان می دهد که

ϕ_j^e و ϕ_j^c توابع درون یاب با درجه های مختلف اند ($m+1=n$, $m < n$). با قرار دادن توابع درون یاب و استفاده از روش گلرکین، می توان معادلات اجزای محدود را به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] & [k_{13}] & [k_{14}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] & [k_{23}] & [k_{24}] \\ [k_{31}] & [k_{32}] & [k_{33}] & [k_{34}] \\ [k_{41}] & [k_{42}] & [k_{43}] & [k_{44}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{v_x\} \\ \{v_y\} \\ \{v_z\} \\ \{p\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \\ \{F^3\} \\ \{F^4\} \end{bmatrix} \quad (19)$$

که

$$(K^{11})_{ij} = \iiint_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} & (2\eta \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \eta \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \\ & + \eta \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z}) \\ & + \rho \phi_i (\bar{v}_x \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \phi_j}{\partial z}) \end{aligned} \right\} dx dy dz \quad (20)$$

$$(K^{12})_{ij} = \iiint_{\Omega} \left\{ \eta \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right\} dx dy dz \quad (21)$$

$$(K^{13})_{ij} = \iiint_{\Omega} \left\{ \eta \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right\} dx dy dz \quad (22)$$

$$(K^{14})_{ij} = \iiint_{\Omega} \left\{ \eta \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \phi_j \right\} dx dy dz \quad (23)$$

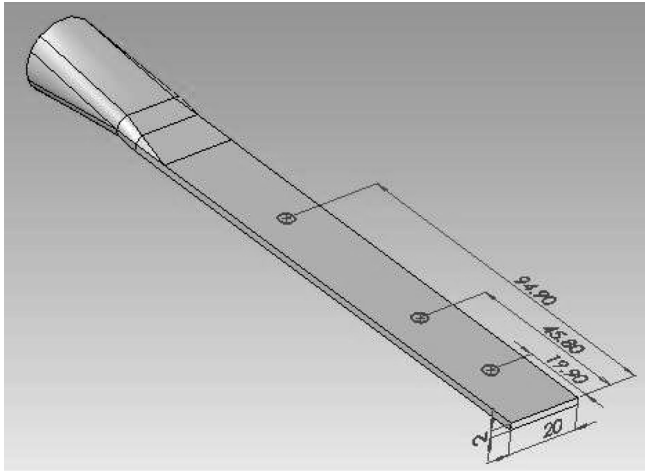
$$(K^{21})_{ij} = \iiint_{\Omega} \left\{ \eta \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right\} dx dy dz \quad (24)$$

$$(K^{22})_{ij} = \iiint_{\Omega} \left\{ \begin{aligned} & \eta \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + 2\eta \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + \eta \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \\ & + \rho \phi_i (\bar{v}_x \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \phi_j}{\partial z}) \end{aligned} \right\} dx dy dz \quad (25)$$

$$(K^{23})_{ij} = \iiint_{\Omega} \left\{ \eta \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right\} dx dy dz \quad (26)$$

$$(K^{24})_{ij} = \iiint_{\Omega} \left\{ \eta \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \phi_j \right\} dx dy dz \quad (27)$$

$$(K^{31})_{ij} = \iiint_{\Omega} \left\{ \eta \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right\} dx dy dz \quad (28)$$

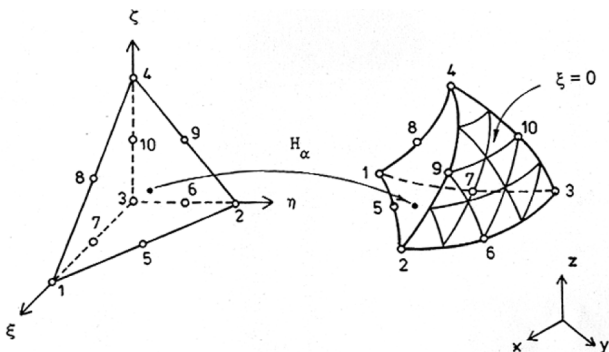


شکل ۲- نمای سه بعدی از حدیده (اندازه ها به میلی متر هستند).

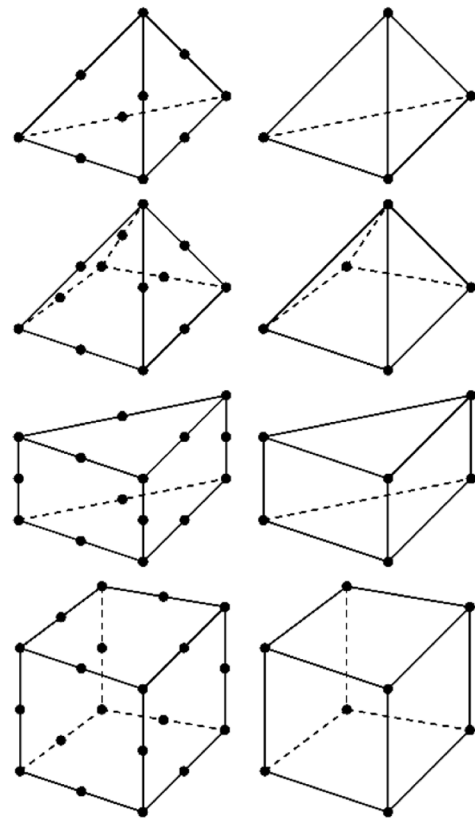
متوسط ورود مذاب (محاسبه شده از دبی متوسط اکسترودر) و برای خروجی شرایط فشار آزاد یعنی شرط مرزی نوع دوم اعمال شده است. بنابراین، مهم ترین نوآوری این پژوهش را می توان به کارگیری هم زمان اجزای هرمی چهاروجهی درجات بالا با روش اجزای محدود ترکیبی دانست. همچنین، برای تکمیل آن و به منظور حصول اطمینان از دقت و صحت کاربری مدل ایجاد شده نتایج به طور کامل با داده های تجربی مقایسه شد و در نهایت روش مطمئنی برای شبیه سازی حدیده های مورد استفاده در صنایع پلیمری با هندسه های پیچیده که بر مبنای استفاده از اجزای یاد شده هستند، ارائه شد. همچنین، اثر گراندروی مذاب بر دقت تحلیل مدل نیز بررسی شد.

استراتژی حل معادلات

برای حل معادلات، انتقال به مختصات محلی برای اجزای ایزوپارامتریک هرمی انجام شده (شکل ۳) و سپس اعضای ماتریس سختی و بردار بار در هر جزء به کمک روش انتگرال گیری گوس محاسبه شدند. به دنبال آن معادلات جبری حاصل درون یک ماتریس کل قرار گرفته، روی هم سوار



شکل ۳- انتقال به مختصات محلی در اجزای چهار وجهی ۱۰ گره ای.

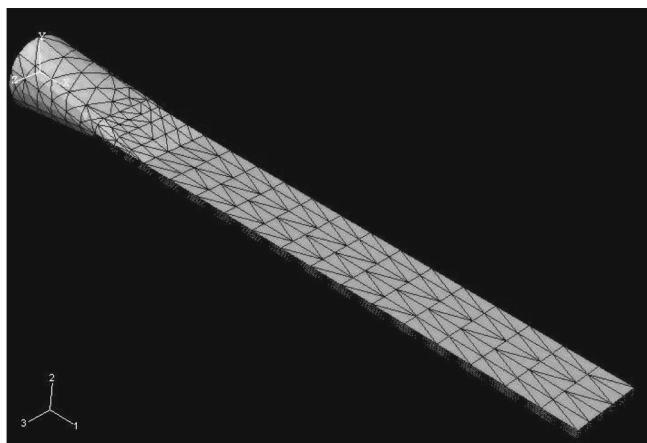


شکل ۱- اجزای Taylor-Hood برای فشار و سرعت.

می توان برای فشار و سرعت در حالت سه بعدی از آنها در مدل ترکیبی استفاده کرد. بر اساس این شکل اجزای سمت راست برای فشار و اجزای سمت چپ برای سرعت مورد استفاده قرار می گیرند. همان طور که در این اجزا دیده می شود، اجزای فشار یک درجه پایین تر از اجزای سرعت هستند. چون جمله فشار در همه گره ها ظاهر نمی شود، سوار کردن فقط برای درجه های آزادی سرعت قابل اعمال است. بنابراین، یک شبکه اجزای محدود با N گره دارای $3N+M$ مجهول است که N تعداد گره ها در اجزا ($3N$) تعداد درجه های آزادی سرعت در حالت سه بعدی) و M تعداد درجه های آزادی فشار است [۱۶-۱۸].

اجزای هرمی چهار وجهی ۱۰ گره ای برای سرعت و ۴ گره ای برای فشار، کارآمدترین اجزا برای شبکه بندی های پیچیده معرفی شده اند. بنابراین در این پژوهش، از این اجزا برای شبکه بندی مسیر جریان در حدیده استفاده شده و برنامه اجزای محدود بر اساس این اجزا نوشته شده است.

در نهایت برای تکمیل مدل ریاضی شرایط مرزی اعمال شد. شکل ۲ نمای سه بعدی این حدیده را نشان می دهد. برای اعمال شرایط مرزی سرعت سیال روی دیواره ها برابر صفر در نظر گرفته شد. به عبارت دیگر، شرط مرزی نوع اول اعمال شد. برای مقدار ورودی سرعت



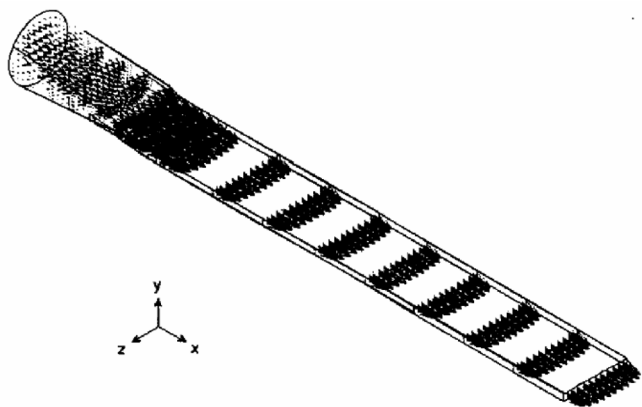
شکل ۵- شبکه بندی مسیر جریان در حدیده.

Poliran (LDPE) ساخت پتروشیمی بندر امام و پلی اتیلن سنگین نوع PE-EX3 (HDPE) ساخت پتروشیمی اراک انجام شد. خواص فیزیکی و مکانیکی این سه نوع پلی اتیلن در جدول ۱ آمده است.

در هر آزمایش فشار در سه ناحیه واقع روی حدیده که در شکل ۲ نشان داده شده اند، اندازه گیری شد و دبی وزنی متوسط نیز برای هر دور پیچ معین شد. شکل ۴ نمایی از فرایند اکستروژن با استفاده از این حدیده و یک اکسترودر تک پیچی و همچنین نحوه تعیین فشار در نواحی مختلف حدیده را نشان می دهد.

با توجه به مقدار دبی جرمی، سرعت متوسط ورود مذاب به حدیده به عنوان شرط مرزی ورودی برای مدل سازی انتخاب شد. شبکه بندی مسیر جریان درون حدیده در شکل ۵ نشان داده شده است. در این شبکه بندی از اجزای هر می ۱۰ گره ای استفاده شده است. تعداد کل اجزا ۶۴۱۵ و تعداد کل گره ها ۹۷۸۵ عدد بود.

شکل ۶ بردارهای سرعت حاصل از مدل سازی را برای سرعت پیچ



شکل ۶- بردار سرعت در طول حدیده در سرعت پیچ ۶۰ rpm.

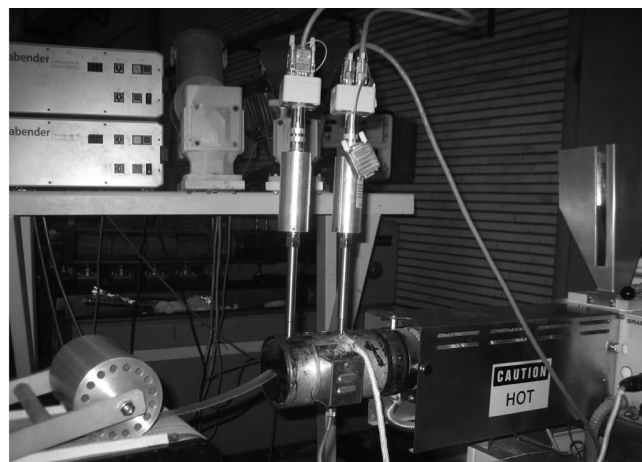
جدول ۱- خواص فیزیکی و رئولوژیکی پلی اتیلن های مختلف.

PE-5218	PE-0200	PE-EX3	پلیمر	
			مشخصه	
۰/۸۵	۰/۴۳	۰/۲۹	شاخص قانون توانی	
۱۱۳۰	۱۳۱۰۰	۵۶۶۰۰	ثابت پایداری (Pa.s ⁿ)	
۷۶۰	۷۵۰	۷۸۰	چگالی مذاب (kg.m ⁻³)	
۱۷-۱۹	۱/۸-۲/۲	۰/۴-۰/۷	شاخص جریان مذاب (g/۱۰min)	

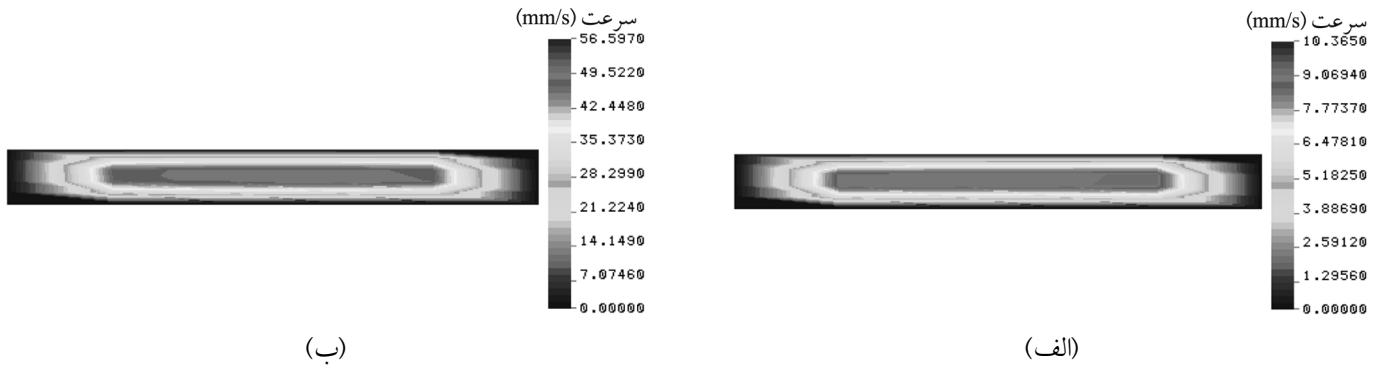
شده و پس از اعمال شرایط مرزی به وسیله الگوریتم حل فرونتال گوس حل شدند. غیرنیوتنی بودن رفتار رئولوژیکی سیال و وجود مؤلفه های سرعت در جمله جابه جایی موجب می شود، تا معادلات نهایی به دست آمده غیرخطی باشند که از روش تکرار پیکارد برای حل این معادلات استفاده شد.

نتایج و بحث

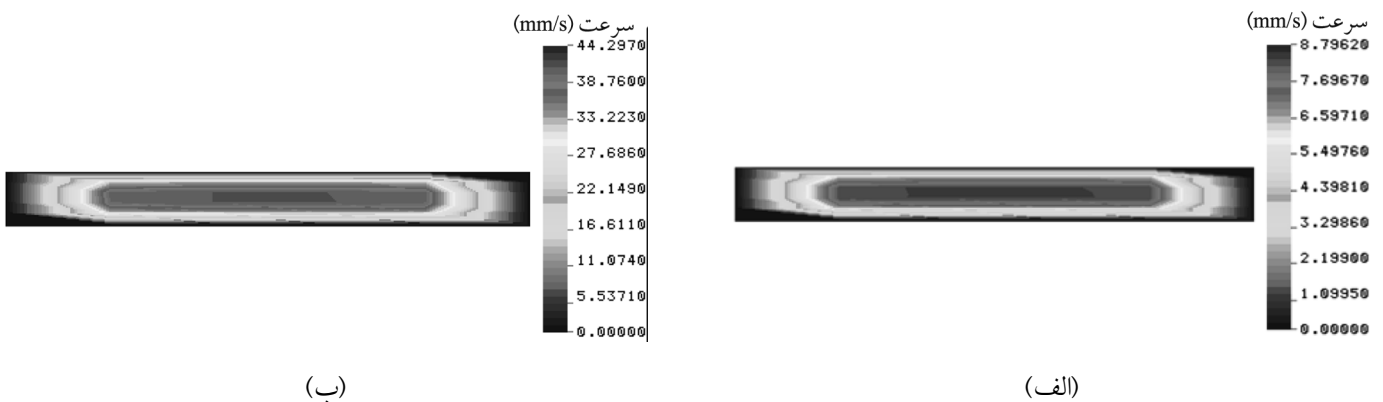
با استفاده از روش محاسباتی که در بخش های قبل توضیح داده شد، برنامه رایانه ای به زبان فورترن نوشته و از آن برای شبیه سازی جریان مذاب استفاده شد. برای تعیین اعتبار مدل ایجاد شده، نتایج مدل سازی با داده های تجربی به دست آمده از اکسترودر تک پیچی آزمایشگاهی برابندر مقایسه شد. آزمایش ها برای پنج سرعت مختلف پیچ ۲۰، ۴۰، ۶۰، ۸۰ و ۱۰۰ rpm طراحی شد. این شبیه سازی برای پلی اتیلن سنگین نوع Poliran (HDPE) 5218-EA و پلی اتیلن سبک نوع LF-0200



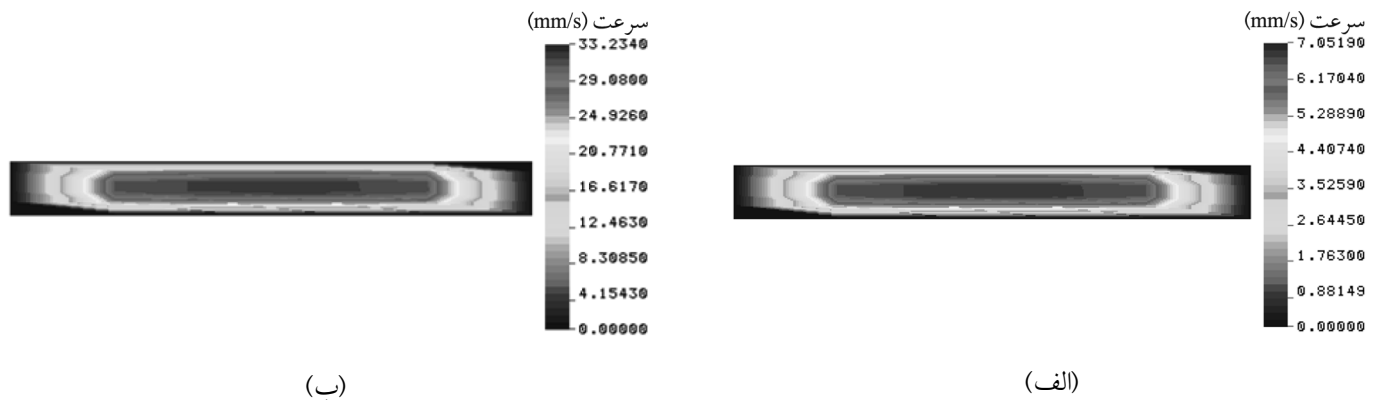
شکل ۴- نمایی از فرایند اکستروژن به وسیله اکسترودر مجهز به حدیده و فشارسنج.



شکل ۷- نیم رخ سرعت در خروجی حدیده برای نمونه PE-5218 در سرعت های مختلف پیچ: (الف) ۲۰ rpm و (ب) ۱۰۰ rpm.



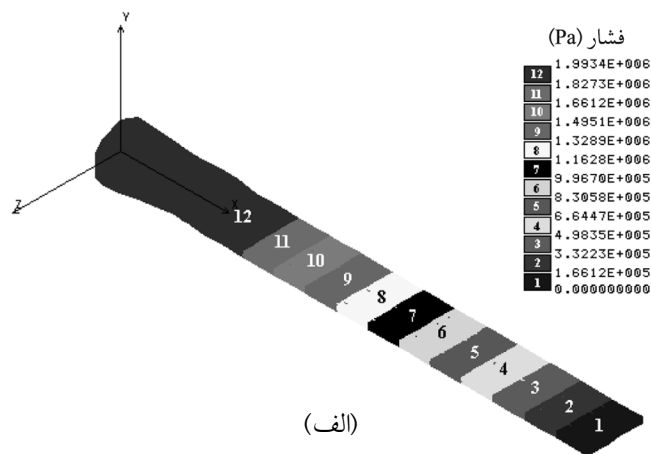
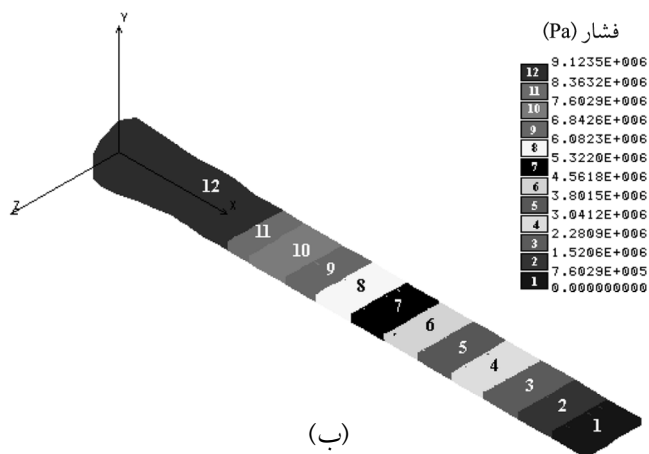
شکل ۸- نیم رخ سرعت در خروجی حدیده برای نمونه PE-0200 در سرعت های مختلف پیچ: (الف) ۲۰ rpm و (ب) ۱۰۰ rpm.



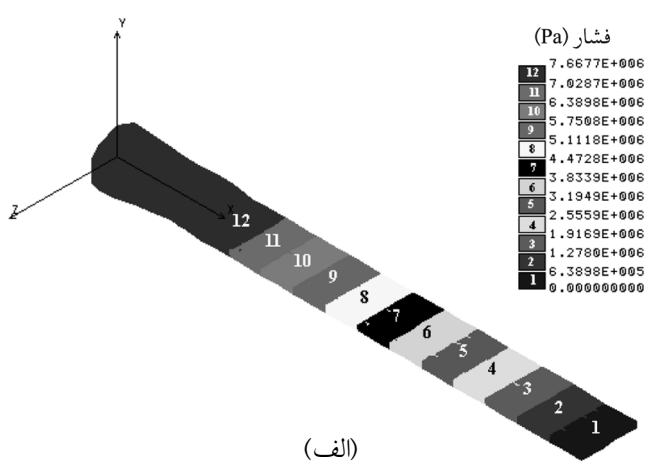
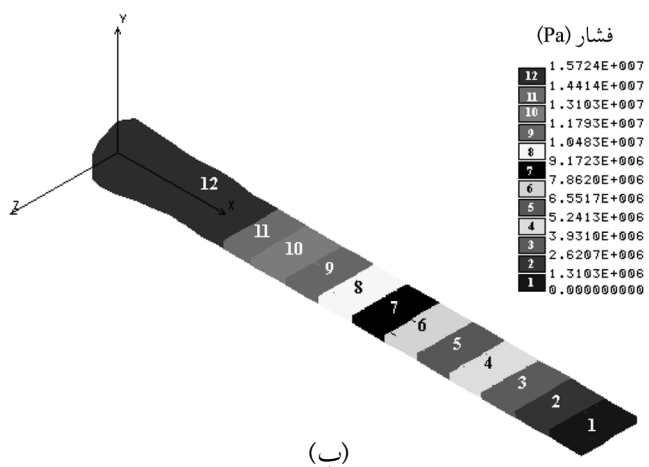
شکل ۹- نیم رخ سرعت در خروجی حدیده برای نمونه PE-EX3 در سرعت های مختلف پیچ: (الف) ۲۰ rpm و (ب) ۱۰۰ rpm.

نشان داده شده است. نمودار تغییرات فشار در طول حدیده برای نمونه های مختلف PE و در سرعت های پیچ متفاوت در شکل ۱۳ الف-ج آورده شده است. برای تعیین اعتبار نتایج مدل سازی با نتایج تجربی، فشار در سه نقطه

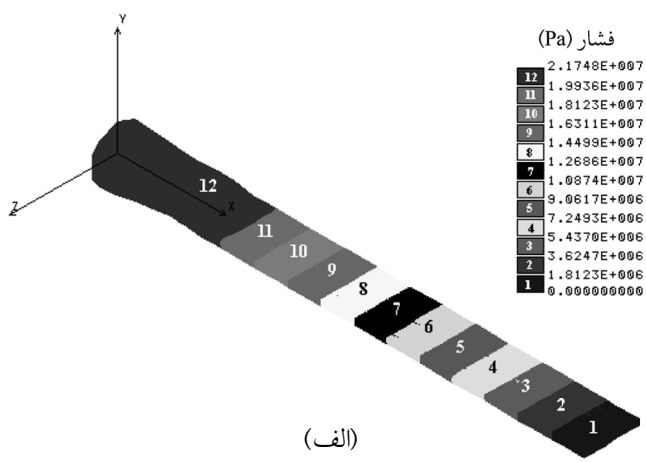
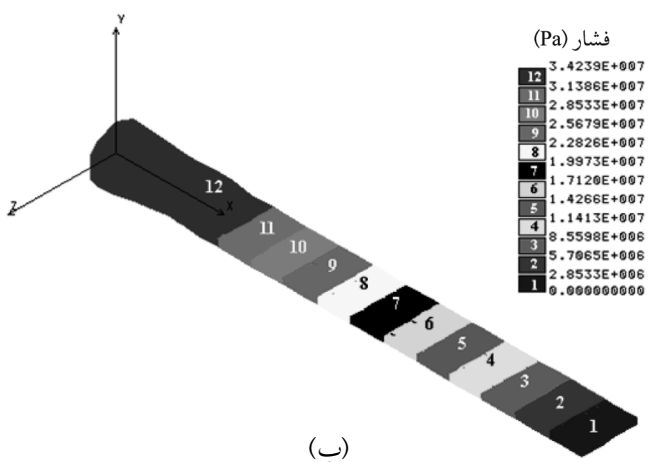
۶۰ rpm نشان می دهد. شکل های ۷ تا ۹ نیز نیم رخ سرعت در ناحیه خروجی حدیده در سرعت های ۲۰ و ۱۰۰ rpm را برای نمونه های مختلف PE نشان می دهد. نتایج شبیه سازی برای فشار درون حدیده در سرعت های پیچ ۲۰ و ۱۰۰ rpm برای سه نمونه PE در شکل های ۱۰ تا ۱۲



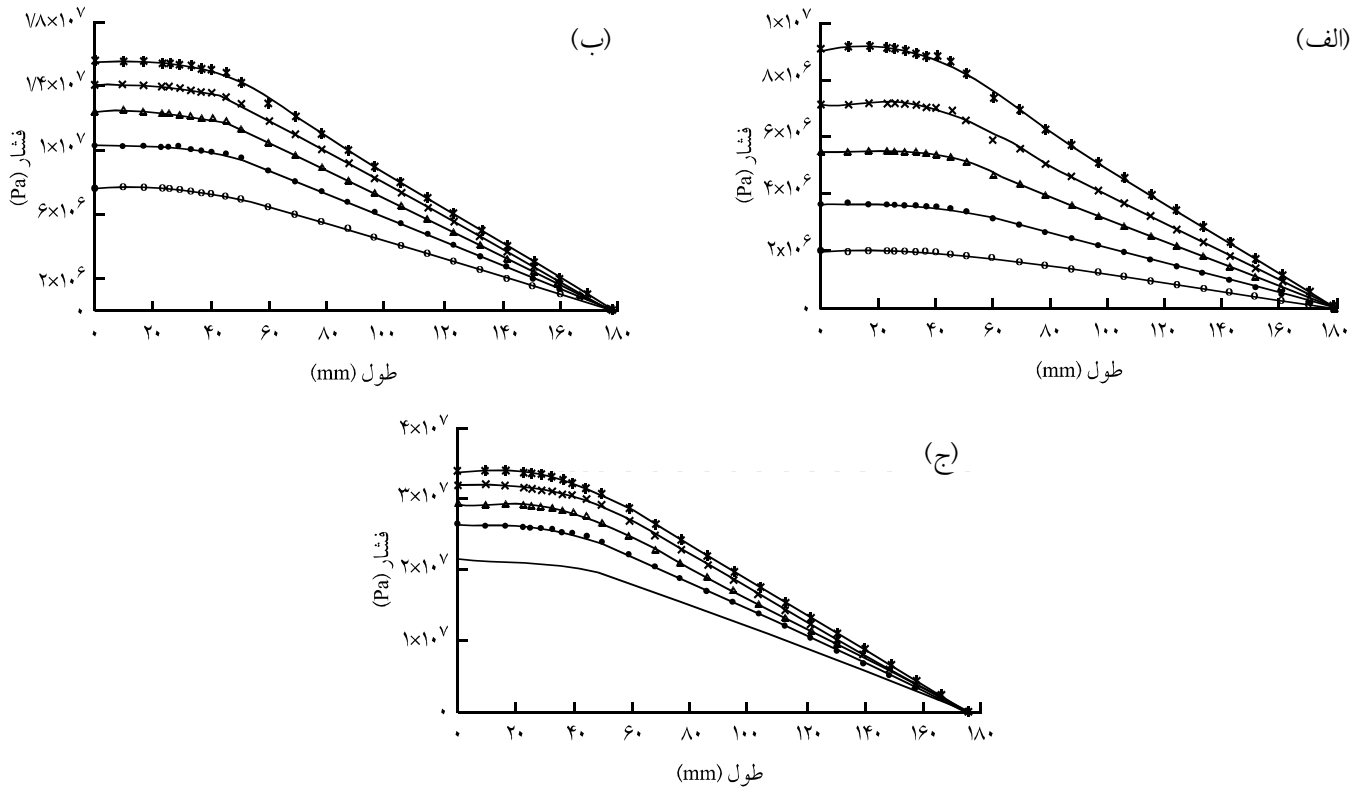
شکل ۱۰ - تغییرات فشار در طول حدیده برای نمونه PE-5218 در سرعت های مختلف پیچ: (الف) ۲۰ rpm و (ب) ۱۰۰ rpm.



شکل ۱۱ - تغییرات فشار در طول حدیده برای نمونه PE-0200 در سرعت های مختلف پیچ: (الف) ۲۰ rpm و (ب) ۱۰۰ rpm.



شکل ۱۲ - تغییرات فشار در طول حدیده برای نمونه PE-EX3 در سرعت های مختلف پیچ: (الف) ۲۰ rpm و (ب) ۱۰۰ rpm.



شکل ۱۳ - مقایسه تغییرات فشار محاسباتی در طول حدیده در سرعت های مختلف برای نمونه های: (الف) PE-5218، (ب) PE-0200 و (ج) PE-EX3.

جدول ۲ - مقایسه بین فشارهای تجربی و محاسباتی در بخش های مختلف حدیده.

نمونه	سرعت پیچ (rpm)	دبی وزنی تجربی (g/s)	سرعت متوسط ورودی (mm/s)		فشار ناحیه اول (MPa)		فشار ناحیه دوم (MPa)		فشار ناحیه سوم (MPa)	
			ورودی	متوسط	تجربی	مدل سازی	تجربی	مدل سازی	تجربی	مدل سازی
EX3	۲۰	۰/۱۸۷	۰/۷۴۶	۱۴/۴۵	۱۴/۴۷	۶/۹۲	۶/۹۶	۲/۸۰	۲/۷۹	0200
5218		۰/۲۱۵	۰/۹۱۲	۵/۳۰	۵/۲۸	۲/۵۵	۲/۵۳	۷/۱۷	۷/۱۵	5218
EX3	۴۰	۰/۳۷۰	۱/۴۷۳	۱۷/۹۴	۱۷/۸۹	۸/۴۹	۸/۴۷	۳/۵۰	۳/۴۸	0200
0200		۰/۴۲۳	۱/۷۹۶	۷/۱۰	۷/۰۸	۳/۴۰	۳/۳۹	۷/۷۵	۷/۷۲	5218
5218		۰/۴۴۳	۱/۸۸۱	۲/۶۴	۲/۵۸	۷/۳۰	۷/۲۸	۰/۵۹	۰/۵۸	EX3
EX3	۶۰	۰/۵۳۹	۲/۱۴۷	۲۰/۰۰	۱۹/۹۵	۹/۶۵	۹/۶۴	۴/۲۰	۴/۱۷	0200
0200		۰/۶۴۳	۲/۷۳۲	۸/۵۰	۸/۴۷	۴/۰۴	۴/۰۴	۷/۸۳	۷/۸۲	5218
5218		۰/۶۵۸	۲/۹۸۱	۳/۹۵	۳/۸۲	۷/۸۶	۷/۸۲	۰/۸۹	۰/۸۵	EX3
EX3	۸۰	۰/۷۲۱	۲/۸۷۱	۲۱/۵۰	۲۱/۴۸	۱۰/۴۵	۱۰/۴۶	۴/۵۴	۴/۵۱	0200
0200		۰/۸۵۳	۳/۶۲۴	۹/۶۵	۹/۶۲	۴/۵۸	۴/۵۷	۲/۰۲	۱/۹۸	5218
5218		۰/۸۸۴	۴/۰۰۵	۵/۲۵	۴/۸۳	۲/۵۵	۲/۳۵	۷/۱۶	۷/۰۵	EX3
EX3	۱۰۰	۰/۸۸۰	۳/۵۰۴	۲۲/۹۵	۲۲/۹۲	۱۷/۱۰	۱۷/۰۸	۴/۹۵	۴/۹۳	0200
0200		۱/۰۵۶	۴/۴۸۹	۱۰/۷۰	۱۰/۶۵	۵/۰۴	۵/۰۵	۲/۲۵	۲/۲۵	5218
5218		۱/۱۳۸	۵/۱۵۸	۶/۶۵	۶/۱۲	۳/۱۵	۲/۹۰	۷/۴۲	۷/۲۳	

پلیمرهایی با گرانروی کم در سرعت های برش کم داراست. ولی، برای تحلیل رفتار مذاب این پلیمرها در سرعت های برش زیاد به دلیل تغییر رفتار رئولوژیکی مذاب از غیرنیوتنی به نیوتنی دقت مدل کاهش یافته و باید تغییر رفتار رئولوژیکی مذاب در مدل لحاظ شود.

نتیجه گیری

در این پژوهش با استفاده از روش اجزای محدود، یک مدل ریاضی برای شبیه سازی جریان سیالات پلیمری درون حدیده های مورد استفاده در فرایند اکستروژن توسعه داده شد. مبنای این مدل ریاضی استفاده از اجزای هرمی چهاروجهی است. بنابراین، قابلیت مدل سازی حدیده های مختلف با شکل های هندسی پیچیده با استفاده از این مدل فراهم می شود.

مقایسه نتایج تجربی با نتایج حاصل از مدل سازی برای مذاب های پلی اتیلن با گرانروی های مختلف که از رفتار رئولوژیکی قانون توانی تبعیت می کنند، ثابت کرد که این مدل در تحلیل جریان سیالات پلیمری با گرانروی زیاد از دقت بسیار بالایی برخوردار است. اما، برای سیالات پلیمری با گرانروی کم در سرعت های برش زیاد به علت تغییر رفتار رئولوژیکی سیال پلیمری از حالت غیرنیوتنی به نیوتنی دقت مدل کاهش می یابد و باید این تغییر رفتار سیال در مدل در نظر گرفته شود.

مراجع

1. Michaeli W., *Extrusion Die for Plastics and Rubbers*, Hansser, Chap.1 and 3, Munich, 1992.
2. Sander R. and Pittman J.F.T., Simulation of Slit Dies in Operation Including the Interaction between Melt Pressure and Die Deflection, *Polym. Eng. Sci.*, **35**, 1713-1722, 1995.
3. Tanoue S. and Iemoto Y., Effect of Die Gap Width on Annular Extrudates by the Annular Extrudate Swell Simulation in Steady-States, *Polym. Eng. Sci.*, **39**, 2172-2180, 1996.
4. Liu L.D., Wen S.H. and Liu T.J., Extrusion Die Design for Viscoplastic Fluids, *Adv. Polym. Technol.*, **13**, 283-295, 1994.
5. Liu L.D., Wen S.H. and Liu T.J., A Simple Model for Heat Transfer Inside an Extrusion Die, *Polym. Eng. Sci.*, **35**, 1713-1722, 1996.
6. Huneault M.A., Lafleur P.G. and Carreau P.J., Evaluation of the FAN Technique for Profile Die Design, *Int. Polym. Proc.*, **11**, 50-57, 1996.
7. Lawal A., Railkar S. and Kalyon D.M., A New Approach to Simulation of Die Flow Which Incorporates the Extruder and Rotating Screw Tips in the Analysis, *Int. Polym. Proc.*, **12**, 123-129, 1997.
8. Malik M. and Kalyon D.M., 3D Finite Element Simulation of Processing of Generalized Newtonian Fluids in Counter-rotating and Tangential TSE and Die Combination, *Int. Polym. Proc.*, **20**, 398-409, 2005.
9. Ghoreishy M.H.R. and Razavi-Nouri M., A Three-Dimensional Finite Element Analysis of a Power-Low Fluid in an Extrusion Die, *Iran. Polym. J.*, **7**, 277-287, 1998.
10. Ghoreishy M.H.R. and Razavi-Nouri M., Finite Element Analysis of Thermoplastic Melts Flow through the Metering and Die Regions of Single Screw Extruders, *J. Appl. Polym. Sci.*, **25**, 676-689, 1999.
11. Bird R.B., Armstrong R.C. and Hassager O., *Dynamic of Poly-*

- mer Liquids*, John Wiley and Sons, **1**, Chap. 1, USA, 1987.
12. Donea J. and Huerta A., *Finite Element Methods for Flow Problems*, John Wiley and Sons, Chap. 4, England, 2003.
13. Reddy J.N., *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, Chap. 4, USA, 1993.
14. Reddy J.N. and Gartling D.K., *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamic*, CRC, Chap. 4, New York, 1994.
15. Cheung Y.K., Lo S.H. and Leung A.Y.T., *Finite Element Implementation*, Blackwell Science, Chap. 3, London, 1996.
16. Nassehi V., *Practical Aspects of Finite Element Modelling of Polymer Processing*, John Wiley and Sons, Chap. 3 and 4, England, 2002.
17. Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L., *Finite Element Method*, **3**, Fluid Dynamics, Butterworth-Heinemann, 5th ed., Chp. 4, England, 2000.
18. Brezzi F. and Fortin M., *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer-Verlag, Chap. 2, New York, 1991.